Министерство сельского хозяйства РФ

ФГБОУ ВПЛО «Брянская государственная
сельскохозяйственная академия»

Комогорцев В.Ф.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

С ОСНОВАМИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие
для студентов экономических специальностей
сельскохозяйственного вуза
(бакалавриат)

Брянск-2013

УДК 512 (07)
ББК 22.14
К 63

Комогорцев В.Ф. ***Линейная алгебра с основами аналитической геометрии на плоскости:*** учебное пособие для студентов экономических специальностей сельскохозяйственного вуза (бакалавриат) / В.Ф. Комогорцев. – Брянск: Издательство Брянской ГСХА, 2013г. – 130 с.

Данное учебное пособие соответствует ныне действующему федеральному государственному стандарту высшего профессионального образования по направлению подготовки 080100 «Экономика», квалификация (степень) «бакалавр». Оно содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы.

Рецензенты:
зав. кафедрой информатики Брянской ГСХА, к.т.н., доцент Безик Д.А.
доцент кафедры высшей математики и физики, кандидат технических наук Яковенко Н.И.

Рекомендовано к изданию методической комиссии факультета энергетики и природопользования от 5.03.2013 года, протокол № 20.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Дисциплина, которой посвящено данное учебное пособие, называется «Линейная алгебра». Слово «алгебра» всем известно по школе. Это раздел математики, изучающий уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств.

Уравнения и неравенства разделяют на: *а*) линейные; *б*) нелинейные. Линейные уравнения и неравенства – это те, в которые все неизвестные входят в *первой степени*. То есть так, как входят переменные x и y в линейную функцию $y = kx + b$. А нелинейные уравнения и неравенства – это все остальные.

Например:

а) $2x + 1 = 0$ - линейное уравнение с одной неизвестной x.

б) $2x + 1 \succ 0$ - линейное неравенство с одной неизвестной x.

в) $\begin{cases} x + 3y = -1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ - система линейных уравнений с двумя неизвестными x и y.

г) $\begin{cases} x + 3y \prec -1 \\ 2x - y \succ 5 \end{cases}$ - система линейных неравенств с двумя неизвестными x и y.

д) $x^2 - 3x - 4 = 0$ - нелинейное (квадратное) уравнение с одной неизвестной x.

е) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x^2 + 5y - 1 = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ - система трех уравнений с двумя неизвестными x и y, в которой первое и третье уравнения линейные, а второе уравнение нелинейное.

В линейной алгебре изучаются лишь линейные уравнения, неравенства и их системы. Из всех уравнений и неравенств они являются наиболее простыми и в то же время наиболее востребованными как в экономике, так и в других науках, использующих математику. И это не случайно. Вслед за древнегреческим философом Эпикуром «поблагодарим мудрую природу за то, что она сделала всё ненужное сложным и всё сложное ненужным».

Развитие методов решения систем линейных уравнений привело к таким понятиям, как *многомерные векторы, матрицы, определители*. Поэтому они тоже являются объектами изучения в линейной алгебре.

Кроме линейной алгебры, мы еще рассмотрим ключевые понятия и факты такого тесно связанного с ней раздела математики, как *аналитическая геометрия*. Аналитическая геометрия – это геометрия, объекты изучения которой рассматриваются в системе координат.

ГЛАВА I
Аналитическая геометрия на плоскости

Аналитическая геометрия – это область математики, в которой геометрические задачи решаются не средствами геометрии (построением чертежей и их анализом), а средствами алгебры и математического анализа, в основе использования которых лежит *метод координат*. Или, если коротко, аналитическая геометрия – это геометрия в системе координат.

Различают *аналитическую геометрию на плоскости* (аналитическую планиметрию) и *аналитическую геометрию в пространстве* (аналитическую стереометрию). Мы ограничимся рассмотрением лишь основных понятий и фактов аналитической планиметрии.

§ 1. Метод координат. Декартовы координаты

Метод координат основан на всем известном из курса элементарной математики свойстве числовой оси: *каждой точке M этой оси соответствует некоторое действительно число x, и наоборот* (рис. 1.1).

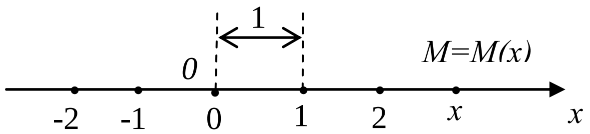


Рис.1.1

Число x называется *координатой точки M*, и обозначается это так: $M = M(x)$ (читается: точка M – точка с координатой x). Координата x точки M, по определению, есть расстояние от начальной точки O (координата которой равна 0) до точки M, взятое со знаком плюс, если точка M находится справа от точки O, и со знаком минус, если она находится слева от нее.

В числовую ось, при желании, можно превратить любую прямую. Для этого следует:

а) выбрать одно из направлений этой прямой за положительное (поставить стрелку, указывающую это направление);

б) выбрать одну из точек прямой в качестве начальной точки O (с ней связывается число 0);

в) установить на прямой масштаб измерения, то есть определиться, отрезок какой длины будет считаться единичным.

Преобразование обычной прямой в числовую ось, когда каждой точке прямой можно поставить в соответствие некоторое действительное число (координату этой точки), представляет собой введение *системы координат на прямой* (рис. 1.1). После введения на прямой системы координат можно уже, очевидно, говорить не о точках этой прямой (точках M), а о соответствующих им числах x – координатах этих точек.

Далее, с помощью взаимно перпендикулярных числовых осей естественным образом устанавливается система координат на плоскости (рис. 1.2) и система координат в пространстве (рис. 1.3). Рисунок 1.2 демонстрирует, что у каждой точки $M = M\ (x;\ y)$ плоскости имеются две координаты: абсцисса x (проекция точки M на числовую ось ox) и ордината y (проекция точки M на числовую ось oy). Аналогично рис. 1.3 демонстрирует три координаты точки $M = \quad M\ (x;\ y;\ z)$ в пространстве: абсциссу x, ординату y и аппликату z, являющиеся проекциями этой точки на числовые оси y ox, oy и oz соответственно.

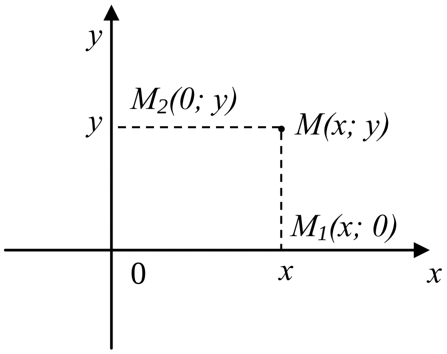


Рис. 1.2

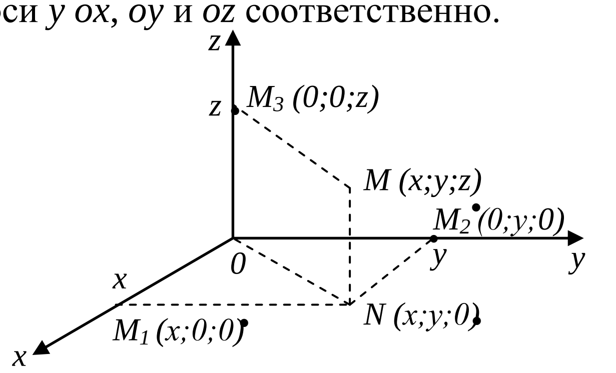


Рис. 1.3

Указанные координаты точек на плоскости и в пространстве называются *прямоугольными* или *декартовыми* – в честь великого французского математика и философа Рене Декарта, который в 17 веке ввел в обиход математики эти координаты.

Опираясь на приведенное выше понятие координат точек прямой, плоскости и пространства (рис. 1.1 – 1.3), можно *любое действительное число x считать точкой числовой оси ox (точкой одномерного пространства); любую пару чисел $(x;\ y)$ – точкой плоскости xoy (точкой двумерного пространства); любую тройку чисел $(x;\ y;\ z)$ – точкой обычного пространства (трехмерного).* И вообще, любую упорядоченную совокупность n действительных чисел $(x_1;\ x_2;\ \ldots\ x_n)$ можно считать *точкой некоего n-мерного пространства.* Для $n > 3$ такое пространство является математической абстракцией (физически непредставимо). И тем не менее введение в математику таких пространств оказалось очень плодотворным и для дальнейшего развития самой математики, и для ее приложений в других науках.

Обратно, после введения системы координат на прямой, плоскости и в пространстве *каждую точку прямой можно считать просто числом; каждую точку плоскости – парой чисел; каждую точку пространства – тройкой чисел.* Эти числа – координаты соответствующих точек. Таким образом, появляется возможность взамен *точек* (геометрических объектов) рассматривать *числа* (алгебраические объекты). А вместо линий, поверхностей, плоских фигур и пространственных тел, то есть вместо *геометрических объектов* рассматривать некие функции, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, то есть *алгебраические объекты*. Таким образом, появляется замечательная возможность преобразовывать геометрические задачи в задачи алгебры и математического анализа, которые обычно решаются проще. В этом, в принципе, и состоит идея метода координат.

Примечание. Упорядоченную совокупность произвольных n чисел можно считать не только точкой, но и *вектором n-мерного пространства*. Такое представление тоже оказалось очень плодотворным и для самой математики, и для ее приложений, в том числе приложений в экономике. И мы на этом еще остановимся – в следующей главе.

§ 2. Полярные координаты на плоскости

Декартовы координаты не всегда оказываются удобными. Например, для математического описания плоских фигур с криволинейными (и особенно с круговыми) границами часто более удобными оказываются *полярные координаты.*

Полярная система координат содержит лишь одну числовую ось p (*полярную ось*), начало которой O называется ее *полюсом* (рис. 1.4).

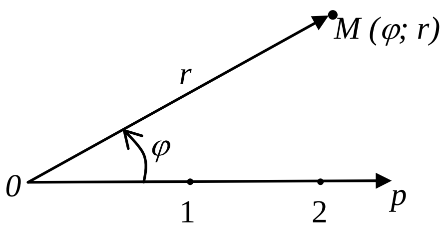


Рис.1.4

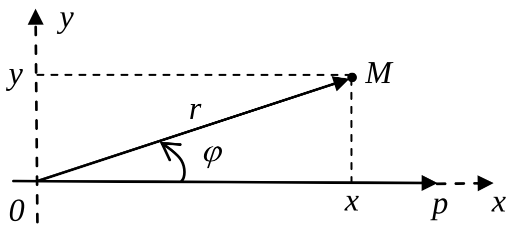


Рис. 1.5

Полярными координатами произвольной точки M плоскости являются ее *полярный угол* φ (угол между полярной осью p и направлением из полюса на эту точку), и *полярное расстояние* r (расстояние от полюса O до этой точки). Полярный угол φ принято считать (если нет специальной оговорки) в пределах $(-\pi;\ \pi]$ и выражать в радианах. Тот факт, что φ и r – полярные координаты точки M плоскости, обозначается так: $M = M(\varphi\,;\,r)$.

Очевидно (см. рис. 1.4), что каждая точка M плоскости, отличная от полюса O, имеет однозначную пару полярных координат $(\varphi\,;\ r)$. Исключение составляет лишь полюс O. У этой точки полярное расстояние $r = 0$, а полярный угол φ не определен. Обратно, по известным полярным координатам $(\varphi;\, r)$ точки плоскости можно, очевидно, однозначно построить и саму точку.

Если наряду с полярными координатами $(\varphi;\, r)$ точки плоскости ввести также ее декартовы координаты, как это показано на рис. 1.5, то связь между ними выразится очевидными формулами:

$$\begin{cases} x = rCos\varphi \\ y = rSin\varphi \end{cases} \tag{2.1}$$

По этим формулам осуществляется переход от полярных координат точек плоскости к декартовым. Обратный переход, от декартовых координат к полярным, осуществляется по формулам,

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{2.2}$$

также очевидным образом вытекающим из рис. 1.5 (или из формул (2.1)). Согласно этим формулам, полярное расстояние r точки, имеющей декартовы координаты $(x;\, y)$, находится однозначно. А полярный угол находится по предварительно вычисляемому $tg\varphi$. Но по $tg\varphi$ угол φ находится, как известно, неоднозначно:

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2.3}$$

Из множества углов φ, предлагаемых формулой (2.3), нужно выбрать один – тот, который соответствует четверти плоскости, в которой находится рассматриваемая точка. Это делается с помощью подбора подходящего значения целого числа n и учете того, что $-\pi < \varphi \le \pi$.

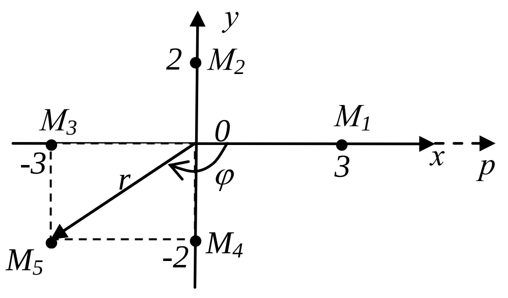


Рис.1.6

Пример 1. Найти полярные координаты изображенных на рис. 1.6 точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.

Решение. Полярные координаты $(\varphi;\, r)$ точек M_1, M_2, M_3, M_4 могут быть найдены и без применения формул (2.2) и (2.3), они очевидны из рис. 1.6:

$$M_1\ (0;\, 3);\ \ M_2\ (\frac{\pi}{2};\, 2);$$

$$M_3\ (\pi;\, 3);\ \ M_4\ (-\frac{\pi}{2};\, 2).$$

А вот полярные координаты $(\varphi; r)$ точки M_5, которые не очевидны, найдем, используя эти формулы:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6056$$

$$tg\varphi = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6667$$

$$\varphi \approx arctg\,0{,}6667 + \pi n \approx 33°42' + 180° \cdot n \;\; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Так как точка M_5 находится в третьей четверти, в которой $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$ (то есть в градусах $-180° < \varphi < -90°$), то чтобы получить такой угол φ для точки M_5, нужно в последней формуле положить n = - 1. В итоге получим: $\varphi \approx 33°42' - 180° = -146°18'$. Переведя градусы в радианы (вручную, используя тот факт, что $180° = \pi$ рад $\approx$ 3,1416 рад., или, что проще, пользуясь специальной таблицей перевода градусной меры в радианную), получим: $\varphi \approx$ -2,5534 (рад). Итак,

$$M_5 = M_5(\varphi; r) = M_5(-2{,}5534; 3{,}6056).$$

Упражнения

1. Даны точки $M_1 = M_1(-1; \sqrt{3})$ и $M_2 = M_2(-1; -\sqrt{3})$ в декартовой системе координат. Найти полярные координаты этих точек.

<u>*Ответ*</u>: $M_1\left(\frac{2\pi}{3}; 2\right)$; $M_2\left(-\frac{2\pi}{3}; 2\right)$

2. Даны точки $M_1\left(\frac{2\pi}{3}; 2\right)$ и $M_2\left(-\frac{2\pi}{3}; 2\right)$ в полярной системе координат. Найти декартовы координаты этих точек.

<u>*Ответ:*</u> $M_1(-1; \sqrt{3})$; $M_2(-1; -\sqrt{3})$.

§ 3. Простейшие задачи на декартовы координаты на плоскости

1. Нахождение расстояния между точками плоскости.

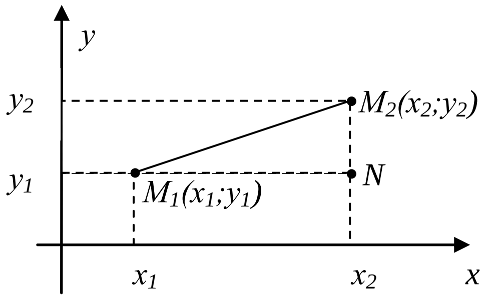


Рис.1.7

Пусть M_1 $(x_1; y_1)$ и M_2 $(x_2; y_2)$ – некоторые две точки плоскости в декартовой системе координат (рис. 1.7). Требуется найти формулу, по которой можно было бы находить расстояние $|M_1M_2|$ между этими точками.

Формула эта очевидным образом вытекает из теоремы Пифагора для треугольника M_1M_2N. Действительно,

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

откуда $|M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2}$. Но, согласно рис. 1.7, $|M_1N| = x_2 - x_1$, а $|NM_2| = y_2 - y_1$. Поэтому получаем окончательно:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (3.1)$$

Это и есть та формула, по которой находят расстояние между точками плоскости в декартовой системе координат.

Примечание. Формула (3.1) выведена нами для того расположения точек M_1 и M_2, которое указано на рис. 1.7 (то есть когда $x_2 > x_1$ и $y_2 > y_1$). Но она будет верна и при любом другом расположении этих точек (подтвердите это самостоятельно).

Пример 1. Найти расстояние между точками $A(0; 2)$ и $B(4; -1)$.

Решение. Принимая точку A за M_1, а точку B за M_2 и используя формулу (3.1), получим:

$$|AB| = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Естественно, тот же результат мы получим, если за точку M_1 примем точку B, а за точку M_2 – точку A:

$$|BA| = \sqrt{(0-4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

2. Деление отрезка в заданном отношении

Рассмотрим еще одну простую, но важную задачу. Требуется найти точку M, делящую заданный отрезок $M_1 M_2$ в заданном отношении λ. Это значит, что искомая точка M должна занимать на отрезке $M_1 M_2$ такое положение, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda \quad (0 < \lambda < \infty - \text{заданное число}) \qquad (3.2)$$

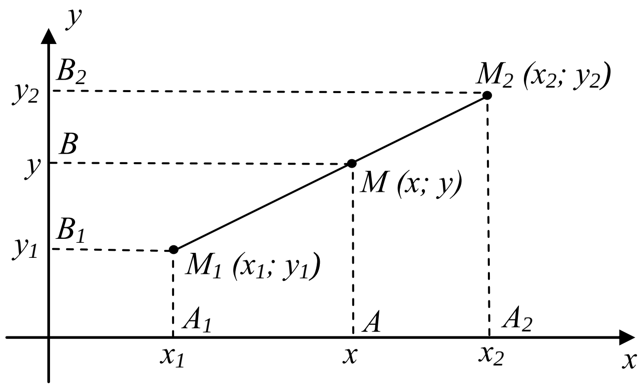


Рис.1.8

Для решения поставленной задачи рассмотрим рис. 1.8.

На основании известной теоремы Фалеса о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем:

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{|A_1A|}{|AA_2|} = \lambda$$

Но, согласно рис. 1.8, $|A_1A| = x - x_1$, а $|AA_2| = x_2 - x$. Поэтому получаем:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda$$

Выражая отсюда x, находим:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.3)$$

Это – абсцисса искомой точки M. Совершенно аналогично находим ее ординату y:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (3.4)$$

Формулы (3.3) и (3.4) и решают поставленную задачу о делении заданного отрезка $M_1 M_2$ в заданном отношении λ.

В частности, если M – середина отрезка $M_1 M_2$, то $\lambda = 1$. Следовательно, координаты $(x; y)$ середины отрезка $M_1 M_2$ таковы:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (3.5)$$

Примечание. Легко показать, что формулы (3.3), (3.4) и (3.5) верны не только для того расположения точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, которое указано на рис. 1.8, но и для любого другого (убедитесь в этом самостоятельно).

Пример 2. Даны точки $M_1(-1; 3)$ и $M_2(3; -2)$. На отрезке M_1M_2 найти точку $M(x;y)$, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2.

Решение. По условию задачи, искомая точка M такова, что

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, в данном случае рассматривается задача о делении отрезка $M_1 M_2$ в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$. Применяя формулы (3.3) и (3.4), находим координаты точки M:

$$x = \frac{-1 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}; \qquad y = \frac{3 + \frac{1}{2}\cdot(-2)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Таким образом, $M = M(\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3})$.

Упражнения

1. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-3; -2)$, $B(0; -1)$ и $C(-2; 5)$ прямоугольный.

2. Найти а) центр; б) радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(4;3)$, $B(-3;2)$, $C(1;-6)$.

Ответ: $D(1; -1)$ – центр; $R=5$ – радиус.

3. В полярных координатах $(\varphi; r)$ даны две точки: $M_1(\pi; 2)$ и $M_2(\frac{\pi}{4}; 3)$. Найти расстояние между ними.

Ответ: $\sqrt{13+6\sqrt{2}}$.

4. Точка M делит отрезок $M_1 M_2$ пополам. При этом $M_1 = M_1(-1; -1)$ и $M=M(0; 1)$. Найти координаты точки M_2.

Ответ: $M_2 = M_2(1; 3)$.

5. Даны две точки $M_1(1; 2)$ и $M_2(4; -1)$. Найти отношение λ, в котором делится отрезок $M_1 M_2$ точкой M своего пресечения с осью ox, а также найти эту точку.

Ответ: $\lambda = 2$; $M(3; 0)$.

§ 4. Линии на плоскости и их уравнения

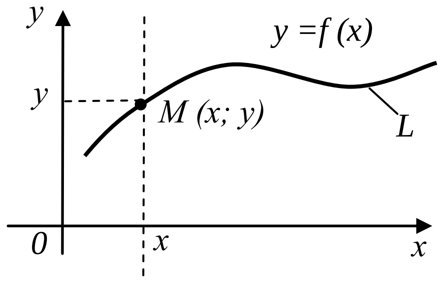


Рис. 1.9

Пусть на плоскости с декартовой системой координат изображена некоторая линия L (рис. 1.9). И пусть это такая линия, что каждая вертикальная прямая, пересекающая линию, пересекает ее только один раз (как на рис. 1.9). Тогда, зная абсциссу x любой точки $M\ (x;\ y)$ этой линии, можно однозначно определить её ординату y. Таким образом, указанная линия L позволяет по значениям одной переменной (x) находить значения другой переменной (y). Но зависимость одной переменной величины от другой в математике называется *функцией*. Значит, линия L задает (определяет) *некоторую функцию*

$$y = f(x) \tag{4.1}$$

Функция y и ее аргумент x являются координатами точек линии L. Сама же линия L является, очевидно, *графиком этой функции*.

Функция (4.1) является, по своей сути, некоторым уравнением. Ему удовлетворяют координаты $(x;\ y)$ любой точки линии L, и только они.

Определение. Уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки линии, и только они, называется *уравнением линии*.

Таким образом, уравнением линии L, изображенной на рисунке 1.9, будет уравнение $y = f(x)$. Оно представляет собой функцию, графиком которой эта линия является.

Таким образом, для линий типа той, что изображена на рис. 1.9, термины «линия и ее уравнение» и «функция и ее график» - это, по существу, одно и то же. Уравнениями таких линий являются функции, графиками которых эти линии являются.

Естественно, что у разных линий будут и разные уравнения. Уравнение линии указывается рядом с линией (см. рис. 1.9).

Мы предполагали, что вертикальные прямые, пересекающие линию L, пересекают ее только один раз. Если это не так, но зато таким свойством обладают горизонтальные прямые, то тогда по ординатам y точек линии будут однозначно определяться их абсциссы x. И тогда уравнение линии можно будет записать в виде функции

$$x = g(y) \tag{4.2}$$

(здесь использована другая буква для обозначения функции, ибо функции (4.1) и (4.2) – разные даже для одной и той же линии).

А теперь будем считать, что L – совершенно произвольная (например, замкнутая) линия, которую некоторые (или даже все) и вертикальные, и горизонтальные прямые пересекают более, чем один раз. У такой линии уже не может быть уравнения ни в форме (4.1), ни в форме (4.2). Но такие уравнения (в той или другой форме) будут у отдельных ее кусков. А для всей линии ее уравнение может быть записано лишь в самом общем виде:

$$F(x; y) = 0 \qquad (4.3)$$

Такое уравнение называется *неявным уравнением линии*, ибо в нем ни одна из переменных не выражена через другую – в отличие от *явного уравнения* (4.1) и *явного уравнения* (4.2).

Пример 1. Рассмотрим рис. 1.10, на котором изображена прямая L_1 – биссектриса первого и третьего координатных углов, и прямая L_2 – биссектриса второго и четвертого координатных углов. Уравнения этих прямых очевидны: $y = x$ – уравнение прямой L_1, $y = -x$ – уравнение прямой L_2. Это – явные уравнения типа (4.1). Их можно записать и в явном виде типа (4.2): $x = y$ и $x = -y$. А теперь рассмотрим объединение этих прямых, то есть линию L, представляющую собой крест из прямых L_1 и L_2. Чтобы записать уравнение этого креста, нужно объединить в одно уравнение уравнения $y = x$ и $y = -x$ прямых, образующих этот крест. И это уравнение очевидно:

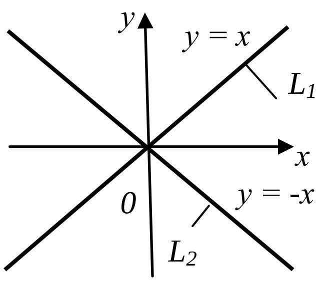


Рис.1. 10

$y^2 - x^2 = 0$. Действительно, выражая из него y, получим $y = \pm x$, то есть получим две функции: $y = x$ и $y = -x$. А это и есть уравнения тех двух прямых, которые образуют крест. Кстати, уравнение креста $y^2 - x^2$ – уравнение типа (4.3), то есть неявное уравнение.

Из различных форм уравнения линии наиболее удобной является форма (4.1), потому что в этом случае уравнение линии представляет собой обычную функцию $y = f(x)$. А значит, исследовать такое уравнение означает исследовать функцию, что является классической и хорошо разработанной математической процедурой. В принципе так же удобно иметь дело и с уравнением линии в форме (4.2). А вот неявное уравнение линии в форме (4.3) гораздо менее удобно для исследования. Поэтому такое уравнение стараются перевести (преобразовать) в явную форму (4.1) или (4.2), выражая из него y через x или x через y (если это возможно). Если это не удается, приходится иметь дело с неявным уравнением (4.3), которое труднее, но тоже поддается математическому исследованию.

Пример 2. Пусть $2y-4x^2=0$ – неявное уравнение некоторой линии. Выразив из него y, получим $y=2x^2$. Это уже явное уравнение той же линии, и теперь даже ясно, какой – параболы.

Примечание. Перенеся в уравнениях (4.1) и (4.2) правую часть налево, мы сделаем эти явные уравнения неявными. Поэтому неявное уравнение линии в форме (4.3) является наиболее общим – в этом виде можно записать уравнение любой линии на плоскости с декартовой системой координат. Но не всякое такое уравнение является уравнением какой-то линии на плоскости. Например, уравнение $x^2+y^2=0$ удовлетворяется, очевидно, лишь при $x = 0$ и $y = 0$ одновременно и, следовательно, определяет лишь одну точку плоскости – точку $O(0;0)$. А уравнение $x^2+y^2=-1$ не может быть удовлетворено ни при каких x и y, а значит, вообще никаких геометрических объектов на плоскости не определяет. Но такие вырожденные случаи малосодержательны, являются исключениями, поэтому мы их во внимание принимать не будем.

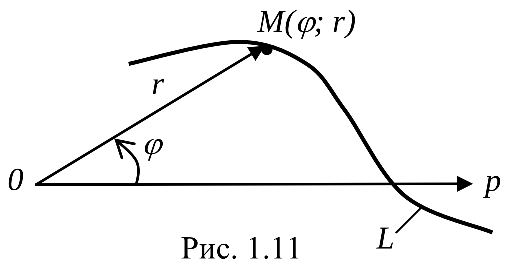


Рис. 1.11

Если на плоскости вместо декартовой системы координат введена полярная система, и на этой плоскости содержится некоторая линия L (рис. 1.11), то уравнение этой линии будет связывать уже не декартовы координаты $(x;\ y)$ произвольной точки M линии L, а ее полярные координаты $(\varphi;\ r)$. При этом если каждому φ будет соответствовать вполне определенное r, то линия L задает r как функцию от φ:

$$r=f(\varphi) \tag{4.4}$$

Эта функция будет *явным* уравнением линии L в полярных координатах. Именно в таком виде его и стараются получить. А в общем виде уравнением линии L в полярных координатах будет некое *неявное* уравнение вида

$$F(\varphi;r)=0 \tag{4.5}$$

Наконец, уравнение линии на плоскости может быть записано и в так называемой *параметрической форме*.

Пусть, например, по плоскости с введенной на ней декартовой системой координат движется точка M, положение которой в каждый момент времени t известно. Это значит, что координаты $(x;\ y)$ движущейся точки заданы как некие функции времени:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (4.6)$$

Система (4.5) определяет движение указанной точки *M(x; y)* по плоскости, а значит, определяет и траекторию *L* движущейся точки. Эта система называется *параметрическим уравнением линии L на плоскости.* В нем координаты *(x; y)* точек линии связаны не непосредственно друг с другом (как в формах (4.1) – (4.3)), а через посредника – параметр *t*. Исключив из системы (4.6) этот параметр, мы можем связать *x* и *y* непосредственно друг с другом. Кстати, параметр *t* в системе (4.6) может иметь и какой-то другой смысл, не обязательно представлять собой время.

Пример 3. Материальная точка поднята над поверхностью земли на высоту *h* и брошена горизонтально со скоростью *v*. Найти уравнение траектории *L* брошенной точки. Сопротивлением воздуха пренебречь.

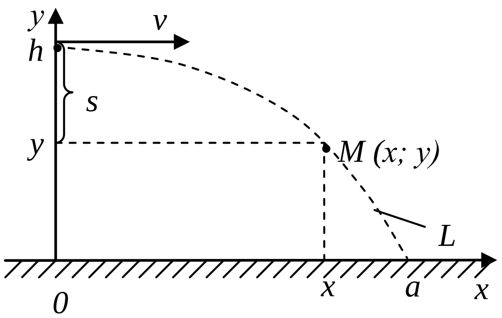


Рис. 1.12

Решение. Рассмотрим рис. 1.12. Так как брошенная точка участвует одновременно в двух независимых движениях – равномерном горизонтально со скоростью *v* и равноускоренном вертикально с ускорением свободного падения *g*, то в любой момент времени $t \geq 0$ координаты *(x; y)* движущейся точки *M* найдутся по хорошо известным из школьной физики формулам:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = h - s = h - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (t \geq 0) \qquad (4.7)$$

Это и есть уравнение траектории *L* брошенной точки (параметрическое). Его, при желании, можно привести и к явному виду (4.1). Для этого из первого уравнения системы (4.7) выразим параметр $t = \dfrac{x}{v}$ и подставим его во второе уравнение. В итоге получим явное уравнение траектории *L* (параболы):

$$y = h - \frac{gx^2}{2v^2}. \qquad (4.8)$$

Кстати, положив в (4.8) $y = 0$ и $x = a$, найдем дальность полета a:

$$a = v\sqrt{\frac{2h}{g}}\,. \qquad (4.9)$$

__Пример 4__. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале декартовой системы координат (рис. 1.13). Из рисунка очевидно, что для каждой точки $M(x;\ y)$ указанной окружности L выполняются равенства:

$$\begin{cases} x = RCos\varphi \\ y = RSin\varphi \end{cases} \quad (-\pi < \varphi \le \pi], \qquad (4.10)$$

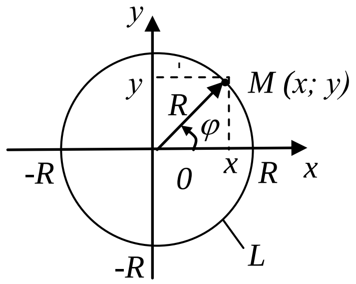


Рис.1.13

где φ – полярный угол точки M. Система (4.10) имеет вид (4.6) при $t = \varphi$ и, следовательно, представляет собой *параметрическое* уравнение окружности L (параметром является угол φ).

Можно связать x и y и напрямую друг с другом, без посредника φ. Для этого возведем каждое уравнение (4.10) в квадрат и сложим их. В итоге получим:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (4.11)$$

Это – уравнение окружности L в декартовых координатах в неявной форме (в форме (4.3)). Выражая из этого уравнения y, можем привести его и к явной форме (форме (4.1)):

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2} \qquad (4.12)$$

Равенство (4.12) содержит два уравнения. При этом $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ – это явное уравнение верхней полуокружности, а $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ – нижней.

Упражнения

1. Решить задачу, рассмотренную в примере 3, когда точка брошена не горизонтально, а под некоторым углом α к поверхности земли.

__*Ответ*__: $\begin{cases} x = (vCos\alpha)\cdot t \\ y = h + (vSin\alpha)\cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$ – в параметрической форме ($t \ge 0$ – время).

2. Точка движется в полярной системе координат по кривой Архимеда, если ее движение представляет собой наложение (суперпозицию) двух независимых движений: равномерного радиального движе-

ния с некоторой линейной скоростью v, и равномерного вращения радиальной прямой вокруг полюса с некоторой угловой скоростью ω. Найти уравнение кривой Архимеда, если в начальный момент времени точка двинулась вдоль полярной оси.

Ответ: $r = \frac{v}{\omega}\varphi$.

§ 5. Первая основная задача аналитической геометрии на плоскости

Основных задач аналитической геометрии на плоскости две. Первая из них: *для заданной линии найти ее уравнение.* Вторая задача – обратная: *по заданному уравнению линии построить линию.*

Начнем с рассмотрения первой, более трудной, задачи. Трудность решения этой задачи очевидна: ведь нужно найти математическое уравнение, которому будут удовлетворять координаты любой точки данной линии, и только они. Для достаточно сложных линий (например, для линии, образованной свободным движением руки) точное решение этой задачи вообще оказывается невозможным – только приближенное. Однако для не слишком сложных и, главное, четко описанных линий их уравнения найти можно. Мы, например, без труда сделали это в предыдущем параграфе для линий, изображенных на рис. 1.12 и 1.13. Рассмотрим еще несколько примеров.

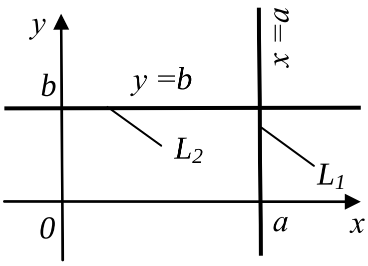


Рис.1.14

Пример 1. Найти уравнения вертикальной прямой L_1 и горизонтальной прямой L_2, изображенных на рис. 1.14.

Решение. Уравнения этих прямых очевидны: $x = a$ – уравнение прямой L_1, $y = b$ – уравнение прямой L_2. Действительно, этим уравнениям удовлетворяют координаты любой точки соответствующих прямых, и только они. В частности, $y = 0$ – это уравнение оси ox, а $x = 0$ – уравнение оси oy.

Пример 2. Найти уравнение прямой L, изображенной на рис. 1.15.

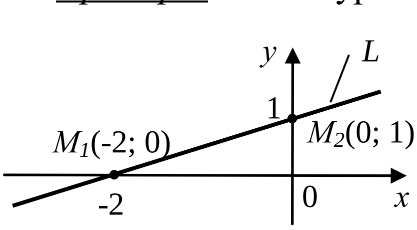


Рис. 1.15

Решение. Как известно из школьного курса математики, наклонная прямая – это график линейной функции вида $y = kx + b$. Значит, уравнение данной прямой L имеет вид $y = kx + b$. Нам только нужно найти параметры k и b этого уравнения.

Используем рис. 1.15. Так как точки $M_1(-2; 0)$ и $M_2(0; 1)$ лежат на прямой L, то их координаты $(x; y)$ должны удовлетворять уравнению прямой. Подставляя эти координаты в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему из двух равенств:

$$\begin{cases} 0 = k \cdot (-2) + b \\ 1 = k \cdot 0 + b \end{cases}$$

Решая ее, находим: $k = \frac{1}{2}$; $b = 1$. Следовательно, уравнение данной прямой L таково: $y = \frac{1}{2}x + 1$. Или, в неявной форме, $x - 2y + 2 = 0$.

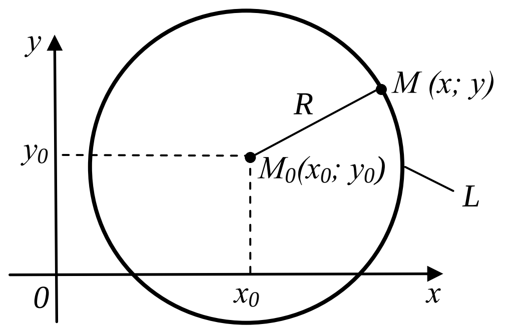


Рис. 1.16

Пример 3. Найти уравнение окружности L с центром в заданной точке $M_0(x_0; y_0)$ и заданным радиусом R (рис. 1.16).

Решение. Для любой точки $M(x; y)$ окружности L, и только для точек этой окружности, имеет место равенство:

$$|M_0M| = R$$

Реализуя это равенство с помощью формулы (3.1) расстояния между двумя точками, получим:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, получим равносильное равенство:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (5.1)$$

Это и есть искомое уравнение указанной окружности L.

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$), то ее уравнение примет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5.2)$$

Это уравнение, кстати, совпадает с уравнением (4.11), полученным ранее другим путем.

Пример 4. Найти уравнение линии, состоящей из точек, равноудаленных от оси ox и от точки $F(0; \frac{1}{2})$.

<u>Решение.</u> Пусть *M(x; y)* – произвольная точка указанной линии, а *N (x;* 0*)* – проекция точки *M(x; y)* на ось *ox* (рис. 1.17). По условию задачи $|FM| = |NM|$ для любой точки *M(x; y)* линии и только для точек этой линии. Если использовать формулу (3.1) расстояния между двумя точками, то это равенство примет вид:

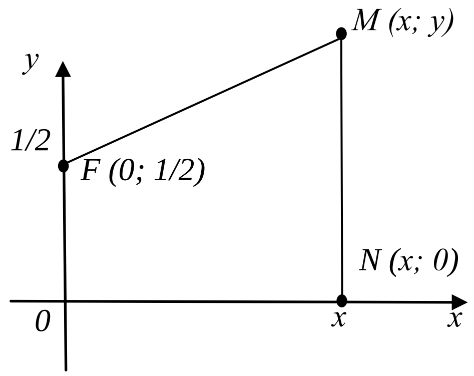


Рис. 1.17

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{1}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2}$$

После возведения в квадрат обеих частей и очевидных упрощений оно примет вид: $y = x^2 + \frac{1}{4}$. Это и есть уравнение рассматриваемой линии. Судя по полученному уравнению, данная линия является параболой $y = x^2$, поднятой на $\frac{1}{4}$ вдоль оси *oy* (рис. 1.18).

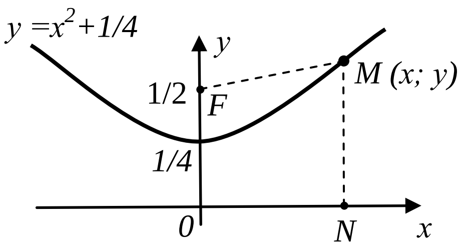


Рис. 1.18

А теперь рассмотрим вопрос о *приближенных уравнениях линий*. Чаще всего этот вопрос возникает, когда речь идет о линиях, полученных в результате экспериментов.

А именно, пусть экспериментальным путем изучается зависимость $y = f(x)$ между двумя величинами. Например, зависимость урожайности культуры y от количества внесенных под нее удобрений x; пройденного пути y от времени движения x; прибыли предприятия y от величины затрат x и т.д. В ходе эксперимента для ряда значений x определяются соответствующие значения y, что приводит к экспериментальной таблице вида

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Данные этой таблицы можно изобразить и графически в виде системы экспериментальных точек M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$, … M_n $(x_n; y_n)$ (рис. 1.19). По этим экспериментальным данным нужно получить искомое уравнение $y = f(x)$, связывающее y с x. Такое уравнение называется *эмпирической формулой*, а сама задача получения такой формулы называется *задачей построения эмпирической формулы.*

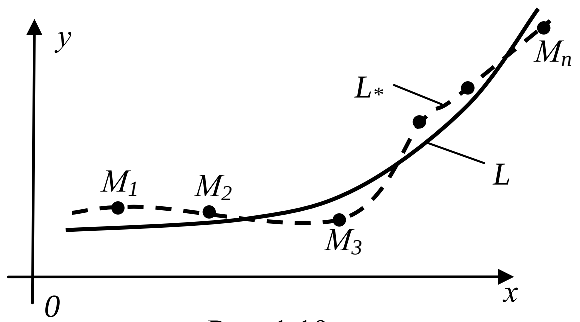


Рис. 1.19

В этой задаче фактически идет речь о нахождении уравнения $y = f(x)$ линии L по точкам M_1, M_2, … M_n, которые, вообще говоря, на этой линии не лежат, так как они содержат в себе неизбежные погрешности эксперимента и, кроме того, содержат результат влияния различных неучтенных факторов (помех). Поэтому искомая линия L может отличаться от линии L_*, непосредственно соединяющей экспериментальные точки. В частности, линия L_* может иметь весьма причудливую форму, в то время как сама линия L будет простой и гладкой (например, прямой). Линия L должна как бы сглаживать линию L_*, устраняя ее незначительные перепады, связанные с неточным положением экспериментальных точек.

При нахождении эмпирической формулы $y = f(x)$, а значит, и соответствующей ей линии L, приходится решать две частные задачи.

Первая из них – выбор *типа эмпирической формулы*. То есть выбор того класса функций, к которому принадлежит искомая функция $y = f(x)$. Во многих случаях класс функций, из которого подбирается эмпирическая формула, подсказывается теоретическими представлениями о характере изучаемой зависимости (зависимость линейная вида $y = kx$ или $y = kx + b$, квадратичная вида $y = ax^2 + bx + c$, обратно пропорциональная вида $y = \frac{k}{x}$, показательная вида $y = ke^{ax}$ и т.д.). Или, если указанные теоретические представления отсутствуют, то класс функций для эмпирической формулы подбирают по характеру расположения экспериментальных точек.

После того, как вид эмпирической формулы выбран, то есть первая частная задача решена, остается определить *наилучшие значения входящих в эту формулу числовых коэффициентов.* Эта задача (вторая частная задача) уже более легкая, ибо решается стандартным методом – *методом наименьших квадратов*. В соответствии с этим методом наилучшими значениями параметров эмпирической формулы считаются те, при которых сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от эмпирической кривой $y = f(x)$ была бы минимальной.

Вручную реализовывать метод наименьших квадратов трудоемко, но это и не требуется – обычно это делается по стандартным программам на ЭВМ.

Впрочем, в простейшем (и наиболее часто встречающимся на практике) случае, когда экспериментальные точки располагаются приблизительно по прямой, можно обойтись и без метода наименьших квадратов – можно все сделать вручную, графическим путем.

В этом случае эмпирическая формула $y = f(x)$ строится, естественно, в виде уравнения прямой $y = kx + b$. Параметры $k = tg\alpha = \frac{Y}{X}$ и b этого уравнения имеют наглядный геометрический смысл (рис.1.20), поэтому могут быть найдены из чертежа. Сама прямая L, сглаживающая экспериментальные точки, строится на глаз, вручную. Этот графический путь почти исключает вычисления, он нагляден, и при достаточном навыке дает результаты ненамного худшие, чем метод наименьших квадратов.

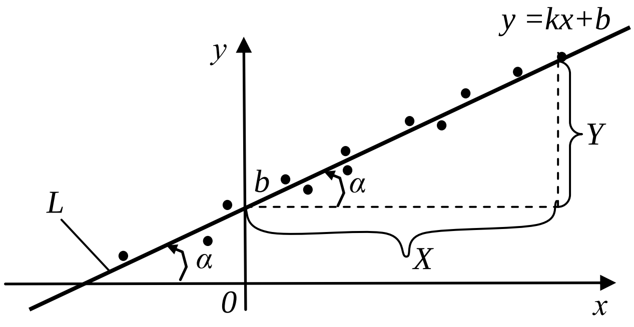


Рис 1.20

Кстати, этим путем можно построить и достаточно хорошие эмпирические формулы для ряда несложных экспериментальных кривых – параболы, гиперболы и т.д., но на этом останавливаться не будем.

Упражнения

1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(-2;3)$.

<u>*Ответ*</u>*:* y = -1,5x

2. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x;\ y)$, равноудаленная от начала координат и от точки A(-4; 2). Лежат ли на этой линии точки B(-2;1), C(2;3), D(1;7)?

<u>*Ответ*</u>*:* $y = 2x + 5$. Точки B и D лежат на линии, C – не лежит.

3. Найти уравнение линии, по которой движется точка, оставаясь постоянно вдвое ближе к оси *ox*, чем к оси *oy*. Построить линию по ее уравнению.

<u>*Ответ*</u>*:* $y = \pm\frac{1}{2}x$ – крест из прямых $y = \frac{1}{2}x$ и $y = -\frac{1}{2}x$.

4. Найти уравнение линии, состоящей из таких точек, что разность расстояний от каждой из них до точек $F_1(-2;-2)$ и $F_2(2;2)$ равна 4. Построить линию по ее уравнению.

Ответ: $y = \dfrac{2}{x}$ – гипербола.

5. По данным эксперимента, представленным в таблице, графическим путем подобрать эмпирическую формулу вида $y = kx + b$.

x	-0,20	0,20	0,40	0,60	0,70	0,80
y	0,96	1,40	1,56	1,74	1,92	2,04

Ответ: $y = 1{,}03x + 1{,}19$.

§ 6. Вторая основная задача аналитической геометрии на плоскости

Эта задача - обратная первой. То есть уравнение линии L дано, а по нему эту линию нужно построить. Указанная задача существенно проще первой основной задачи, и решается она стандартными методами.

Пусть, например, уравнение некоторой линии L задано в декартовых координатах в виде функции $y = f(x)$ (в явном виде). Требуется по данному уравнению линии L построить саму линию L. В данном случае линия L – это просто график функции $y = f(x)$, который и нужно построить.

В принципе, построить линию – это значит нанести на плоскость все точки линии, совокупность которых и образует линию. Точками, лежащими на линии, будут те и только те точки $M\ (x;\ y)$, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют уравнению линии $y = f(x)$. Так как на любой линии лежит бесчисленное множество точек, то определить координаты каждой из них и нанести все их на плоскость невозможно. Поэтому на практике при построении линии по ее уравнению $y = f(x)$ поступают так. Из области определения функции $y = f(x)$ (то есть из множества всех тех значений x, для которых можно найти y) на выбранном участке оси ox выбирают ряд значений $(x_1;\ x_2;\ \dots\ x_n)$ аргумента x, и по уравнению линии $y = f(x)$ вычисляют соответствующий им набор значений $(y_1;\ y_2;\ \dots\ y_n)$ функции y. В итоге получают таблицу вида

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

(6.1)

содержащую координаты n точек (M_1 $(x_1;\ y_1)$; M_2 $(x_2;\ y_2)$; … M_n $(x_n;\ y_n)$) искомой линии. Нанося эти точки на плоскости xoy и соединяя их плавной кривой, строят искомую линию L (рис. 1.21). Этот хорошо известный способ называется *построением линии по точкам.*

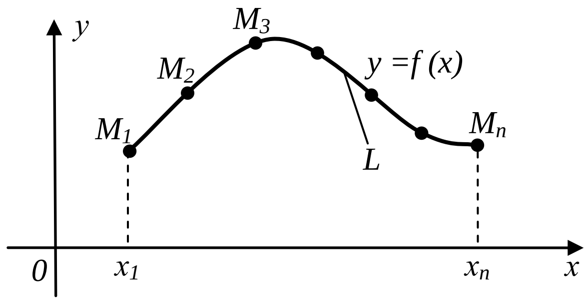


Рис.1.21

По точкам, очевидно, можно построить и линию по ее явному уравнению $r = f(\varphi)$ в полярных координатах. Для этого нужно задать ряд значений полярного угла φ и для них найти соответствующие значения полярного радиуса r. Затем по найденным точкам (M_1 $(\varphi_1;\ r_1)$; M_2 $(\varphi_2;\ r_2)$; … M_n $(\varphi_n;\ r_n)$) строят и саму линию.

Наконец, по точкам можно построить и линию, заданную уравнением в параметрической форме, то есть заданную системой уравнений вида (4.6). Для этого для ряда выбранных значений (t_1; t_2; ... t_n) параметра t вычисляют соответствующие значения x и y, что приводит к таблице вида:

t	t_1	t_2	…	t_n
x	x_1	x_1	…	x_n
y	y_n	y_n	…	y_n

(6.2)

В итоге находятся точки (M_1 $(x_1;\ y_1)$; M_2 $(x_2;\ y_2)$; … M_n $(x_n;\ y_n)$), по которым строят и саму линию.

Отметим, что качество построенной по точкам линии будет выше, если в состав точек, по которым строится линия, будут включены наиболее интересные и важные точки этой линии – ее вершины, впадины, точки пересечения линии с осями координат, точки разрыва линии, и т. д., а также будет учтена возможная симметрия линии, ее повторяемость (периодичность) и другие ее особенности. Получение всей этой важной информации о линии связано с математическим исследованием уравнения линии, о котором здесь говорить не будем. Отметим лишь, что главным образом это исследование опирается на использование специального раздела математики - *дифференциального исчисления,* основы которого, надеемся, известны читателю.

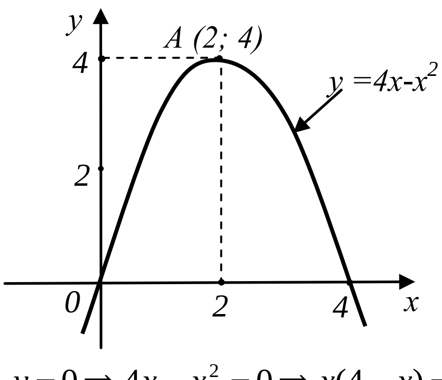
Примечание. Если уравнение линии задано в неявной форме (например, в виде $F(x;y)=0$ или в виде $F(\varphi;\ r)=0$), то и математическое исследование такого уравнения, и нахождение точек такой линии существенно усложняется. Например, задав в уравнении $F(x;y)=0$ значение x, нам придется для нахождения соответствующего значения (значений) y решать это уравнение относительно y. А это может оказаться сделать и непросто. Возможно, даже придется решать это уравнение приближенно машинным путем (на ЭВМ).

Отметим еще следующее. Построение линии по ее уравнению значительно упрощается, если это уравнение принадлежит к известному типу. Например, если уравнение линии представляет собой линейную функцию вида $y = kx + b$, квадратичную функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, показательную функцию вида $y = a^x$, логарифмическую функцию вида $y = \log_a x$ и т.д. Тогда сразу становится известен тип самой линии (прямая, парабола, показательная кривая, логарифмическая кривая и т.д.). Остается лишь установить детали этой линии. Скажем, для параболы – это направление ее ветвей, координаты вершины, точки пересечения с осями координат. После получения этой информации легко строится и сама парабола.

Пример 1. Построить линию, имеющую уравнение $y = 4x - x^2$.

Решение. Уравнение линии представляет собой квадратичную функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, где a = -1; b = 4; c = 0, поэтому данная линия – парабола. Ветви этой параболы направлены вниз, т.к. $a = -1 < 0$. Найдем вершину параболы. Абсциссу $x_в$ вершины найдем по известной школьной формуле:

$$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2\cdot(-1)} = 2$$



А ординату вершины $y_в$ найдем по уравнению параболы: $y_в = 4\cdot 2 - 2^2 = 4$. Итак, точка $A(2;4)$ – вершина параболы.

Теперь найдем точки пересечения параболы с осью ox. На этой оси y=0, поэтому получаем:

$y = 0 \Rightarrow 4x - x^2 = 0 \Rightarrow x(4 - x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$ и $x_2 = 4$.

Итак, парабола пересекает ось ox в двух точках: $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. А теперь строим параболу (данных для ее построения достаточно).

При построении на одном чертеже нескольких линий может возникнуть *вопрос об определении точек пересечения этих линий*.

Пусть, например, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ – уравнения некоторых двух линий, и требуется найти точки их пересечения. Так как искомые точки должны одновременно принадлежать обеим линиям, то и их координаты $(x; y)$ должны одновременно удовлетворять уравнениям обеих линий. То есть они должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases} \tag{6.3}$$

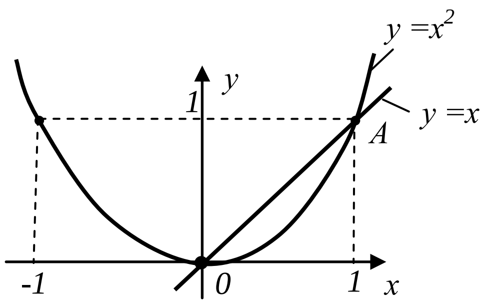
из уравнений этих линий. Обратно, решив систему (6.3), мы найдем такую пару (или такие пары) значений ($x; y$), которые будут одновременно удовлетворять обоим уравнениям этой системы. А это значит, что точки с найденными координатами ($x; y$) лежат на обеих линиях, то есть являются точками пересечения этих линий.

Таким образом, *найти точки пересечения линий – это значит решить систему из уравнений этих линий*.

<u>*Пример 2*</u>. Найти точки пересечения прямой $y = x$ и параболы $y=x^2$. Сделать иллюстрирующий чертеж.

<u>*Решение*</u>. Составим и решим систему из уравнений этих линий:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases} -$$



- два решения системы. Таким образом, имеются две точки пересечения данных прямой и параболы: точка $O(0;0)$ и точка $A(1;1)$. Иллюстрация этого представлена на рисунке.

Упражнения

1. Построить линию, имеющую уравнение $xy = 0$.

<u>*Ответ*</u>: крест из координатных осей ox и oy.

2. Построить линию, имеющую уравнение $2x – 3y = 6$.

<u>*Ответ:*</u> прямая, пересекающая ось ox в точке $x = 3$ и ось oy в точке $y = -2$.

3. Найти точки пересечения прямой $y = x$ и кубической параболы $y = x^3$.

<u>*Ответ:*</u> $O(0; 0)$; $M_1(1; 1)$; $M_2(-1; -1)$.

4. Построить в полярных координатах линию, имеющую уравнение $r = 2\varphi$.

<u>*Ответ:*</u> кривая Архимеда. Ее удобно строить по точкам, используя таблицу значений:

φ	0	π/2	π	3π/2	2π	5π/2	…
r	0	π	2π	3π	4π	5π	…

5. Построить линию, имеющую следующее уравнение в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t \end{cases}$$

<u>*Ответ*</u>: парабола $y = x^2$.

§ 7. Обзор основных линий и их уравнений

(*обзор основных функций и их графиков*)

<u>1. Прямая на плоскости и ее уравнение</u>

Как известно (см. также § 5), уравнения горизонтальных, вертикальных и наклонных прямых имеют соответственно вид:

$$y = b;\ \ x = a;\ \ y = kx + b \qquad (7.1)$$

Все эти уравнения – частные случаи уравнения вида

$$ax + by + c = 0, \qquad (7.2)$$

которое называется *общим уравнением прямой на плоскости.* Общим оно называется потому, что в этом виде можно записать уравнение любой прямой на плоскости. Впрочем, для горизонтальных, вертикальных и наклонных прямых удобнее записывать их конкретные уравнения (7.1).

Остановимся подробнее на уравнениях наклонных прямых $y = kx + b$, хорошо известных еще из школьного курса математики. Прямая L с уравнением $y = kx + b$ изображена на рис. 1.22:

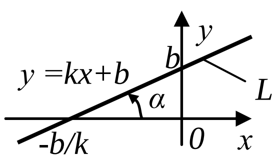


Рис. 1.22

$k = tg\alpha$ – см. рис.
b – см. рис.

Величина $k = tg\alpha$ называется *угловым коэффициентом прямой* L (прямой $y = kx + b$), а величина b определяет точку пересечения этой прямой с осью *оу*. Само уравнение $y = kx + b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Для построения прямой по ее уравнению $y = kx + b$ достаточно найти и нанести на плоскость *xoy* любые две ее точки. Удобнее всего в качестве этих точек взять точки пересечения прямой с осями координат.

<u>*Пример 1*</u>. Построить линию *L*, имеющую уравнение $y = 2x - 7$ (или, что то же самое, построить график функции $y = 2x - 7$).

<u>*Решение*</u>. Данное уравнение $y = 2x - 7$ – это уравнение вида $y = kx + b$ при $k = 2$ и $b = -7$. Но уравнение вида $y = kx + b$ – уравнение наклонной прямой. Значит, наша линия *L* – наклонная прямая. Найдем точки ее пересечения с осями координат.

а) *С осью ox*: на оси *ox* $y = 0$, поэтому из уравнения прямой получаем: $y = 0 \Rightarrow 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = 3{,}5$ - точка пересечения прямой с осью *ox*.

б) *С осью oy*: на оси *oy* $x = 0$, поэтому из уравнения прямой получаем: $x = 0 \Rightarrow y = -7$ - точка пересечения прямой с осью *oy*.

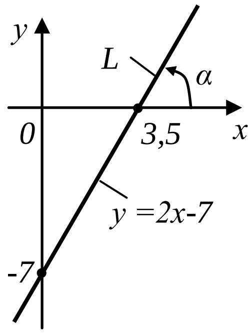


Рис. 1.23

А теперь строим прямую *L* (рис. 1.23).

<u>*Пример 2*</u>. Найти угол α, под которым прямая $y = 2x - 7$ наклонена к оси *ox* (см. рис. 1.23).

<u>*Решение*</u>. Из уравнения прямой $y = 2x - 7$ определяем ее угловой коэффициент *k*: $k = 2$. Но $k = tg\alpha$. Значит, $tg\alpha = 2$, откуда

$$\alpha = arctg\, 2 + \pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Согласно таблице тангенсов (таблице Брадиса), $arctg\, 2 = 63°26'$. Значит,

$$\alpha = 63°26' + 180° \cdot n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Так как $k = tg\alpha = 2 > 0$, то угол α острый ($0° < \alpha < 90°$). Это подтверждает и рис. 1.23. Чтобы из предыдущей формулы получить такой угол α, нужно в ней положить $n = 0$. В итоге получим окончательно: $\alpha = 63°26'$.

А теперь рассмотрим несколько важных стандартных задач на прямые на плоскости.

<u>**Задача 1**</u>. Пусть на прямой *L* известна только одна ее точка $M_0(x_0; y_0)$. Каким будет уравнение этой прямой?

<u>*Решение*</u>. Если эта прямая вертикальная, то ее уравнением будет, очевидно, уравнение $x = x_0$, а если горизонтальная – то уравнение

$y = y_0$. Если же прямая L наклонная, то для полного задания этой прямой, а значит, и для возможности найти ее уравнение нужно, кроме точки $M_0(x_0;\, y_0)$, через которую проходит прямая, задать еще и угол α – угол наклона прямой к оси ox. Или, что более удобно, задать угловой коэффициент $k = tg\alpha$ этой прямой (см. рис. 1.24).

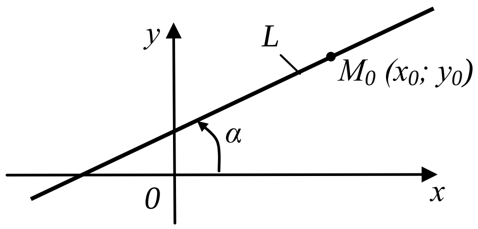


Рис. 1.24

$$\begin{cases} M_0(x_0;\, y_0) \text{ – задана;} \\ k = tg\alpha \text{ – задан} \end{cases}$$

Уравнение изображенной на рис. 1.24 прямой L будем искать в виде $y = kx + b$. Величина k уже известна. А для определения величины b подставим в это уравнение координаты $(x_0;\, y_0)$ точки M_0, лежащей на прямой. В результате найдем b:

$$y_0 = kx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - kx_0$$

Подставляя найденное значение b в уравнение $y = kx + b$, получим:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (7.3)$$

Это и есть искомое уравнение прямой L, изображенной на рис. 1.24 (уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;\, y_0)$ и имеющую заданный угловой коэффициент k).

<u>*Пример 3*</u>. Найти уравнение прямой L, изображенной на рис. 1.25.

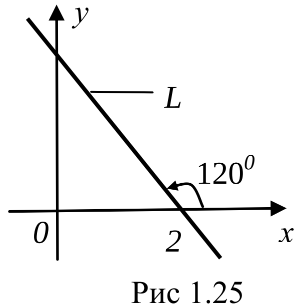


Рис 1.25

<u>*Решение*</u>. Данная прямая L проходит через точку $M_0(2;\, 0)$ и имеет угловой коэффициент

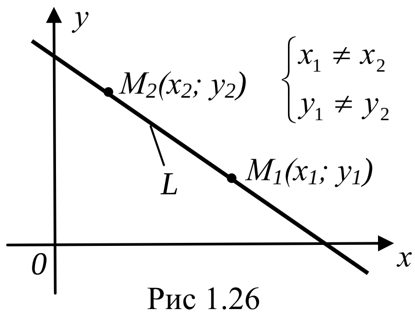
$k = tg\alpha = tg120° = tg(180° - 60°) = tg(-60°) = -tg60° = -\sqrt{3}$

Поэтому, согласно (7.3), получаем следующее уравнение прямой L:

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

<u>**Задача 2**</u>. Пусть теперь на наклонной прямой L заданы две какие-либо ее точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$. Нужно найти уравнение этой прямой (рис. 1.26).

Решение. Уравнение данной наклонной прямой L будем искать в виде $y = kx + b$. Здесь ни k, ни b не известны. Но зато на прямой L известны две ее точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$. Подставляя координаты каждой из них в уравнение прямой $y = kx + b$, получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными для определения k и b. Решая ее, получим:



$\begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_1 \neq y_2 \end{cases}$

Рис 1.26

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + b \\ y_2 = kx_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ b = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \end{cases} \qquad (7.4)$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение $y = kx + b$, после упрощений получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (7.5)$$

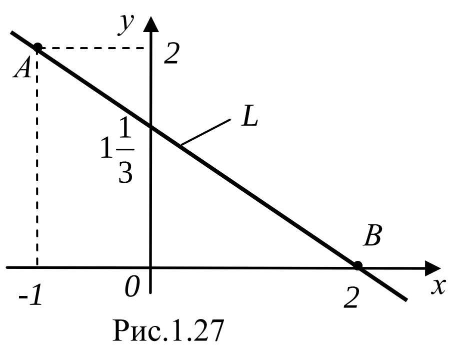
Это и есть уравнение наклонной прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$.

Пример 4. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(-1; 2) и B(2; 0), и найти точку пересечения этой прямой с осью *oy*.

Решение. Приняв точку A(-1; 2) за точку $M_1(x_1;\ y_1)$, точку B(2; 0) за точку $M_2(x_2;\ y_2)$ (а можно и наоборот!) и воспользовавшись уравнением (7.5), получим:

$$\frac{x+1}{2+1} = \frac{y-2}{0-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} \Leftrightarrow 2x + 3y - 4 = 0$$

.



$1\frac{1}{3}$

Рис.1.27

Это и есть искомое уравнение прямой (в форме общего уравнения (7.2)). Выразив из него y, можем записать это уравнение и в явном виде $y = kx + b$:

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Величина $b = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ и определяет точку пересечения данной прямой с осью *oy*. Эта прямая L изображена на рис. 1.27.

<u>Задача 3</u>. Пусть $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ – уравнения некоторых двух данных наклонных прямых. Требуется установить:

а) параллельны они или нет?

б) перпендикулярны или нет?

в) если не параллельны и не перпендикулярны, то каков угол α между ними?

<u>Решение</u>.

а) Пусть прямые L_1 и L_2 параллельны (рис. 1.28 (а)).

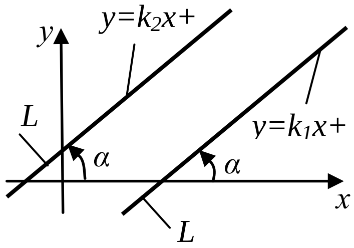


Рис. 1.28

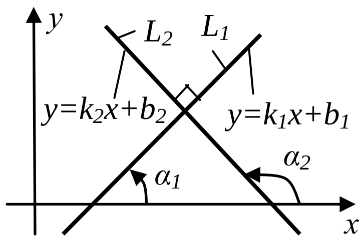


Рис. 1.28 (б)

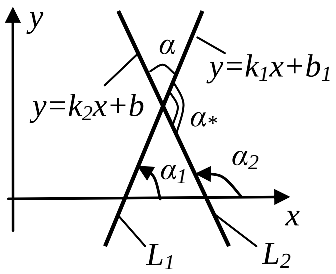


Рис. 1.28 (в)

Тогда $\alpha_1 = \alpha_2$, а значит, $k_1 = k_2$, ибо $k_1 = tg\alpha_1$, а $k_2 = tg\alpha_2$. Обратно, если $k_1 = k_2$, то $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$ или что α_1 отличается от α_2 на угол πn ($n = 0, \pm 1, \ldots$). В любом из этих двух случаев прямые L_1 и L_2 одинаково наклонены к оси *ox*, а значит между собой параллельны.

Таким образом, *прямые* $y = k_1 x + b_1$ *и* $y = k_2 x + b_2$ *параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты*:

$$k_1 = k_2 \tag{7.6}$$

Условие (7.6) называется *условием параллельности прямых*.

<u>Пример 5</u>. Показать, что прямые $y = \frac{1}{2}x$ и $x - 2y + 4 = 0$ параллельны.

<u>Решение</u>. Из уравнения первой прямой $y = \frac{1}{2}x$ следует, что ее угловой коэффициент $k_1 = \frac{1}{2}$. Чтобы получить угловой коэффициент k_2 другой прямой $x - 2y + 4 = 0$, нужно привести её уравнение к виду $y = kx + b$ - к виду с угловым коэффициентом. Делая это, получаем

$y=\frac{1}{2}x+2$, откуда следует: $k_2=\frac{1}{2}$. Так как $k_1=k_2$, то указанные прямые действительно параллельны.

б) Пусть прямые L_1 и L_2 перпендикулярны (рис. 1.28 (б)). Тогда углы их наклона к оси ox отличаются один от другого на прямой угол. То есть $\alpha_2-\alpha_1=\frac{\pi}{2}$ или $\alpha_1-\alpha_2=\frac{\pi}{2}$. А значит, в любом случае имеет место равенство: $\alpha_2=\alpha_1\pm\frac{\pi}{2}$. Но тогда

$$k_2=tg\alpha_2=tg(\alpha_1\pm\frac{\pi}{2})=-Ctg\alpha_1=-\frac{1}{tg\alpha_1}=-\frac{1}{k_1}$$

То есть получаем:

$$k_2=-\frac{1}{k_1} \tag{7.7}$$

Условие (7.7) является *условием перпендикулярности прямых*.

Пример 6. Подтвердить перпендикулярность прямых $x-3y=4$ и $3x+y-1=0$.

Решение. Преобразуя уравнения этих прямых к виду $y=kx+b$ (к виду с угловым коэффициентом), находим:

$$x-3y=4\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{4}{3};\quad k_1=\frac{1}{3}$$

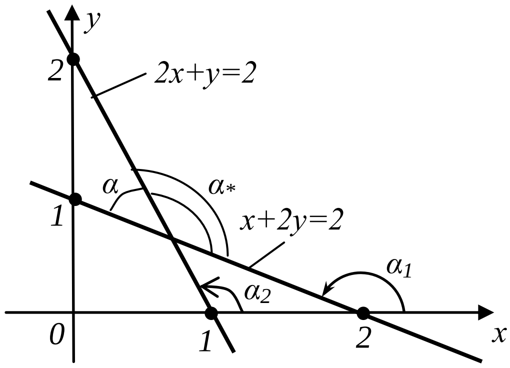
$$3x+y-1=0\Leftrightarrow y=-3x+1;\quad k_2=-3.$$

Так как условие (7.7) выполняется, то указанные прямые перпендикулярны.

в) Пусть теперь прямые L_1 и L_2 составляют между собой угол α (рис. 1.28 (в)), отличный от прямого. Впрочем, углом между прямыми можно, при желании, считать и угол α_*. Но так как в сумме α и α_* составляют, очевидно, 180°, то зная α, можно найти и α_*: $\alpha_*=180^\circ-\alpha$.

Угол α, согласно рис. 1.28 (в), представляет собой разность углов α_1 и α_2. То есть или $\alpha=\alpha_2-\alpha_1$, или $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$. Найдя α_1 и α_2, найдем и α.

Пример 7. Найти угол между прямыми $x+2y=2$ и $2x+y=2$.



Решение. Сначала построим прямые и обозначим на рисунке интересующий нас угол α.

Из рисунка очевидно, что $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$. Найдем α_1 и α_2. Для этого сначала найдем $k_1=tg\alpha_1$ и $k_2=tg\alpha_2$ – угловые коэффициенты прямых:

$$x+2y=2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1;\; k_1=-\frac{1}{2}$$

$$2x+y=2 \Leftrightarrow y=-2x+2;\; k_2=-2.$$

Отсюда следует:

$$tg\alpha_1=-\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1=arctg(-\frac{1}{2})+\pi n=-arctg\,0{,}5+\pi n=$$
$$=-26°34'+180°\cdot n=\left|\text{полагаем } n=1\right|=-26°34'+180°=153°26';$$

$$tg\alpha_2=-2 \Rightarrow \alpha_2=arctg(-2)+\pi n=-arctg\,2+\pi n=-63°26'+180°\cdot n=$$
$$=\left|\text{полагаем } n=1\right|=-63°26'+180°=116°34'.$$

Значит,

$$\alpha=\alpha_1-\alpha_2=153°26'-116°34'=36°52';\quad \alpha_*=143^0 08'.$$

<u>Задача 4</u>. Пусть $ax+by+c=0$ – уравнение некоторой прямой L на плоскости, заданное в общем виде. И пусть $M_0(x_0;\, y_0)$ – некоторая точка плоскости, не лежащая на этой прямой. Требуется найти расстояние d от указанной точки до указанной прямой.

Решение. Рассмотрим рис. 1.29. Если данная прямая L горизонтальна или вертикальна, то решение поставленной задачи труда, естественно, не представляет. Поэтому будем считать, что L – наклонная прямая. В этом случае задачу можно решить по следующей схеме:

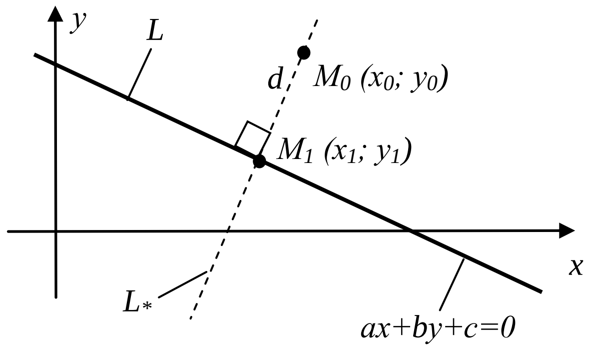


Рис. 1.29

1. Из заданного уравнения $ax+by+c=0$ прямой L находим ее угловой коэффициент k.

2. Находим $k_*=-\frac{1}{k}$ – угловой коэффициент прямой L_*, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно прямой L.

3. Используя равенство (7.3), записываем уравнение прямой L_*:

$$y-y_0=k_*(x-x_0)$$

4. Решаем систему

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ y-y_0=k_*(x-x_0) \end{cases}$$

из уравнений прямых L и L_* и находим точку $M_1(x_1;\ y_1)$ – точку их пересечения.

5. Наконец, используя формулу (3.1) для нахождения расстояния между двумя точками плоскости, находим искомое расстояние $d=|M_0M_1|$.

Если осуществить приведенную выше схему, то в итоге получается следующая простая формула (убедитесь в этом самостоятельно):

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{7.8}$$

Это и есть формула расстояния от заданной точки $M_0(x_0;y_0)$ до заданной прямой $ax+by+c=0$. Кстати, эта формула оказывается справедливой не только для наклонной, но и для горизонтальной и для вертикальной прямой (убедитесь в этом самостоятельно).

Пример 8. В треугольнике ABC с вершинами A(-3;0); B(2;5); C(3;2) найти длину h высоты BD.

Решение. Искомая высота h есть расстояние от точки B до прямой L, проходящей через точки A и C. Чтобы найти это расстояние, нужно сначала найти уравнение этой прямой L. Его найдем, используя уравнение (7.5) прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}; \quad \frac{x+3}{3+3}=\frac{y-0}{2-0}\Rightarrow\frac{x+3}{6}=\frac{y}{2}\Rightarrow x-3y+3=0.$$

Итак, $x-3y+3=0$ – уравнение прямой AC (в общем виде). А теперь по формуле (7.8) найдем расстояние h от точки B до этой прямой:

$$h=\frac{|2-3\cdot 5+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}\approx 3{,}16.$$

2. Некоторые важнейшие кривые на плоскости

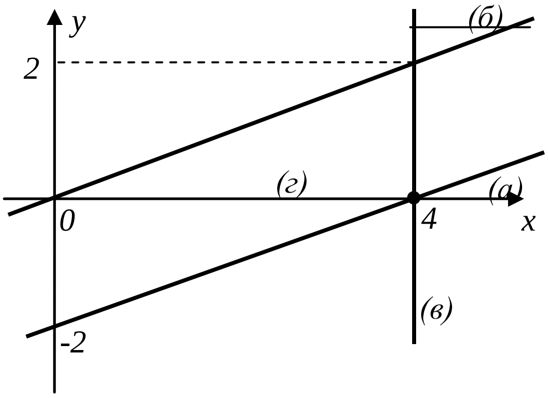
К числу важнейших и наиболее простых кривых линий на плоскости относятся линии со следующими уравнениями:

1. Парабола $y=ax^2+bx+c$.
2. Гипербола $y=\frac{k}{x}$.
3. Окружность $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.
4. Показательная кривая $y=a^x$. Важнейшая из них – экспонента $y=e^x$.
5. Логарифмическая кривая $y=\log_a x$. Важнейшая из таких кривых – кривая натурального логарифма $y=\ln x$.
6. Тригонометрические кривые: синусоида $y=\sin x$; косинусоида $y=\cos x$; тангенсоида $y=tgx$; котангенсоида $y=ctgx$.
7. Обратные тригонометрические кривые: $y=\arcsin x$; $y=\arccos x$; $y=arctgx$; $y=arcctgx$ (кривые без специальных названий).

Вид всех этих кривых хорошо известен из школьного курса математики, поэтому на них останавливаться не будем.

Упражнения

3. Построить прямые: а) $x-2y=4$; б) $x-2y=0$; в) $x-4=0$; г) $2y=0$.



Ответ: - см. рис. ниже.

4. Написать уравнение прямой, пересекающей ось *ox* в точке $x=3$ и составляющей с этой осью угол 120°. Найти точку *A* пересечения этой прямой с осью *oy*.

Ответ: $y=-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$; $A(0;3\sqrt{3})$.

5. Написать уравнение прямой, пересекающей оси координат в точках $x=4$ и $y=2$. Найти угол α между прямой и осью ox.

<u>Ответ</u>: $x+2y-4=0$; $\alpha=153°26'$.

6. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат: а) параллельно прямой $2x+y=2$; б) перпендикулярно этой прямой.

<u>Ответ</u>: а) $y=-2x$; б) $y=\frac{1}{2}x$.

7. Показать, что прямые $2x-3y=6$ и $4x-6y=25$ параллельны, и найти расстояние h между ними.

<u>Ответ</u>: $h=\frac{\sqrt{13}}{2}\approx 1{,}803$.

8. Даны прямая $x+2y-4=0$ и точка $A(5;\ 7)$. Найти проекцию B точки A на данную прямую.

<u>Ответ</u>: $B(2;\ 1)$.

9. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $A(1;2)$.

<u>Ответ</u>: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ и $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

10. Найти а) центр; б) радиус; в) уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(4;3)$, $B(-3;2)$, $C(1;-6)$.

<u>Ответ</u>: а) центр $M_0(1;\ -1)$; *б*) радиус $R=5$; в) уравнение $(x-1)^2+(y+1)^2=25$.

11. Определить тип кривых а) $x=-\sqrt{-y}$; б) $y=-\sqrt{-x}$ и построить эти кривые.

<u>Ответ</u>: а) левая половина параболы $y=-x^2$; б) нижняя половина параболы $x=-y^2$.

§ 8. Геометрическое представление решений неравенств и систем неравенств

Как мы уже знаем из §4, уравнение $F(x;\ y)=0$ в обычных случаях (кроме случаев вырожденых) определяет на плоскости xoy некоторую линию L, координаты $(x;\ y)$ точек которой этому уравнению удовлетворяют. Для координат $(x;\ y)$ всех других точек плоскости xoy, не лежащих на линии L, будет либо выполняться неравенство $F(x;\ y)\succ 0$, либо неравенство $F(x;\ y)\prec 0$, либо выражение $F(x;\ y)$ не будет существовать.

Возникает естественный вопрос: как рассортировать эти точки? То есть где именно на плоскости xoy будут находиться точки, координаты которых удовлетворяют, например, неравенству $F(x;\, y) \succ 0$? Или неравенству $F(x;\, y) \prec 0$?

Начнем с рассмотрения этих вопросов для простейших, очевидных случаев.

1) Неравенствам $x \succ 0$ и $x \prec 0$ удовлетворяют, очевидно, координаты $(x;\, y)$ точек правой и левой полуплоскости соответственно. Для точек оси oy, разделяющей правую и левую полуплоскости, имеет место уравнение $x = 0$, которое является уравнением этой оси.

2) Неравенствам $y \succ 0$ и $y \prec 0$ удовлетворяют, очевидно, координаты $(x;\, y)$ точек верхней и нижней полуплоскости соответственно. Для точек оси ox, разделяющей верхнюю и нижнюю полуплоскости, имеет место уравнение $y = 0$, которое является уравнением этой оси.

3) Неравенствам $x \succ a$ и $x \prec a$ соответственно удовлетворяют, очевидно, координаты $(x;\, y)$ точек, находящихся правее вертикальной прямой, имеющей уравнение $x = a$, и точек, находящихся левее этой прямой.

4) Неравенствам $y \succ b$ и $y \prec b$ соответственно удовлетворяют, очевидно, координаты $(x;\, y)$ точек, находящихся выше горизонтальной прямой, имеющей уравнение $y = b$, и точек, находящихся ниже этой прямой.

5) Теперь рассмотрим линейные неравенства вида $y \succ kx + b$ и $y \prec kx + b$. Вспоминая, что $y = kx + b$ - уравнение наклонной прямой L, делящей плоскость xoy на две полуплоскости – верхнюю и нижнюю (рис. 1.30), приходим к очевидному выводу: неравенству $y \succ kx + b$ удовлетворяют точки верхней полуплоскости, а неравенству $y \prec kx + b$ - нижней.

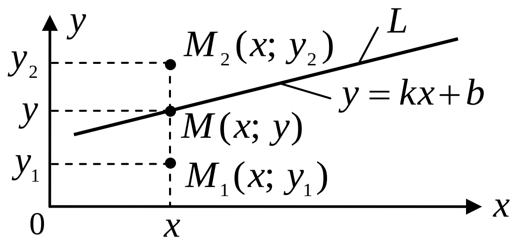


Рис. 1.30

$$y = kx + b$$
$$y_1 \prec kx + b$$
$$y_2 \succ kx + b$$

Таким образом, из рассмотренных выше случаев (1) – (5) получаем следующий вывод. Если в уравнении любой прямой (вертикальной $x = a$, горизонтальной $y = b$, наклонной $y = kx + b$) заменить знак равенства на знак неравенства, то получающемуся неравенству будут удовлетворять координаты $(x;\, y)$ всех точек одной из тех двух полуплоскостей, на которые эта прямая делит плоскость. Какой именно из полуплоскостей = это зависит от знака неравенства.

6) Наконец, рассмотрим линейные неравенства с двумя переменными x и y общего вида:

$$а)\ ax+by+c \succ 0 \ \text{ и } \ б)\ ax+by+c \prec 0. \qquad (8.1)$$

Так как равенство $ax+by+c=0$ - это уравнение прямой на плоскости при любых значениях числовых параметров a, b и c, то переход от этого уравнения к неравенствам (8.1) означает переход с прямой на одну из тех полуплоскостей, на которые эта прямая делит всю плоскость xoy. Чтобы выяснить, на какую именно, есть два способа.

Способ первый. Он состоит в преобразовании неравенства (8.1) к одной из тех форм (1) – (5), которые были рассмотрены выше. После этого искомая полуплоскость становится очевидной.

Способ второй. Следует построить прямую $ax+by+c=0$. Затем взять пробную точку $M(x;\,y)$ в одной из полуплоскостей, на которые эта прямая разобьет плоскость xoy, и подставить координаты $(x;\,y)$ этой точки в данное неравенство. Если неравенство удовлетворится, то оно будет удовлетворяться и для всех точек выбранной полуплоскости. А если не удовлетворится, то оно будет удовлетворяться в другой полуплоскости.

Примечание. Нестрогие неравенства вида

$$а)\ ax+by+c \ge 0 \ \text{ и } \ б)\ ax+by+c \le 0. \qquad (8.2)$$

будут выполняться в одной из полуплоскостей, включая саму прямую.

Пример 1. Выяснить, для каких $(x;\,y)$ будет выполняться неравенство $3x-2y+6 \succ 0$.

Решение.

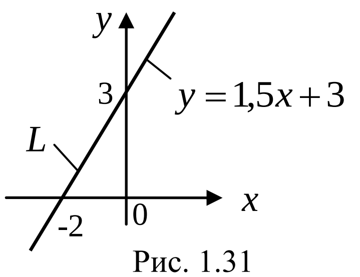


Рис. 1.31

Первый способ. Преобразуем данное неравенство:
$3x-2y+6 \succ 0$; $\Leftrightarrow$ $2y \prec 3x+6$; $\Leftrightarrow$ $y \prec 1{,}5x+3$.
Построим прямую L, имеющую уравнение $y=1{,}5x+3$ (построим по точкам ее пересечения с осями координат) – рис. 1.31. Неравенство $y \prec 1{,}5x+3$, а, значит, и исходное неравенство $3x-2y+6 \succ 0$, выполняется в полуплоскости ниже прямой L.

Второй способ. Построим прямую $3x-2y+6=0$ (это та же прямая L), и возьмем в качестве пробной точки какую-либо точку, не лежащую на этой прямой. Например, точку $O(0;\,0)$, лежащую ниже прямой L. Координаты точки $O(0;\,0)$ удовлетворяют данному неравенству $3x-2y+6 \succ 0$. Значит, это неравенство выполняется в полуплоскости ниже прямой L.

Пример 2. Выяснить, для каких $(x;\, y)$ будет выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} 3x-2y+6 \succ 0 \\ x \prec 0 \\ y \succ 0 \end{cases}$$

Решение. Используя результат, полученный в предыдущем примере, приходим к очевидному выводу: данная система выполняется внутри треугольника, ограниченного прямой L и осями координат (рис. 1.31).

Пример 3. Выяснить, для каких $(x;\, y)$ будет выполняться неравенство $x^2+y^2-9 \le 0$.

Решение. Преобразуем данное неравенство к виду: $x^2+y^2 \le 3^3$. А теперь рассмотрим уравнение $x^2+y^2=3^3$. Это – уравнение окружности с центром в начале координат и с радиусом $R=3$ (см. формулу 4.11 или формулу 5.2). Для координат $(x;\, y)$ любой точки M, лежащей на этой окружности, выполняется равенство: $x^2+y^2=3^3$. А для координат $(x;\, y)$ любой точки N, лежащей внутри окружности, то есть ближе к ее центру (см. рис.1.32), будет, очевидно, выполняться строгое неравенство $x^2+y^2 \prec 3^3$. То есть неравенство $x^2+y^2 \le 3^3$, а, значит, и исходное неравенство $x^2+y^2-9 \le 0$, будет выполняться для всех точек круга, ограниченных окружностью L, включая и саму эту окружность.

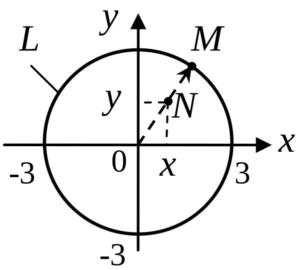


Рис. 1.32

Упражнения

1. Найти и изобразить на плоскости xoy множество всех решений следующих неравенств:

$a)$ $x+1 \prec 0$; б) $y-2 \ge 0$; $в)$ $y-x \succ -1$; $г)$ $y+x \le 3$.

$д)$ $x-2y+4 \succ 0$; $е)$ $x-2y \le -4$.

2. Найти и изобразить на плоскости xoy множество всех решений следующих систем неравенств:

$a)$ $\begin{cases} x-y \succ 0 \\ y+x \succ 0; \\ x \ge -1 \end{cases}$ $б)$ $\begin{cases} x+y \le 3 \\ y \ge 0 \quad ; \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$ $в)$ $\begin{cases} x \prec y^2 \\ x \succ 0 \ ; \\ y \prec 2 \end{cases}$ $г)$ $\begin{cases} x^2+y^2 \prec 2 \\ y \prec x^2 \quad . \\ x \succ 0 \end{cases}$

ГЛАВА II
Линейная алгебра

§1. Векторы

1.1. Геометрические векторы. Основные понятия и определения. Действия с геометрическими векторами

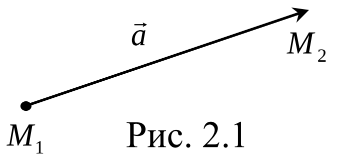


Рис. 2.1

Геометрический вектор – это *направленный отрезок* (рис 2.1). У него есть начало – точка M_1 и конец – точка M_2. Обозначается геометрический вектор (будем в дальнейшем опускать слово «геометрический» и говорить просто вектор) символом $\overrightarrow{M_1M_2}$ или, короче, $\vec{a}$. С помощью векторов в математике описываются физические величины, имеющие направление в пространстве – силы, скорости, ускорения, импульсы, моменты сил, напряженности электрических полей, индукции магнитных полей, и т.д. Все это – векторы. Кстати, величины, не имеющие направления (масса, длина, площадь, объем, мощность, энергия, количество произведенной продукции, ее стоимость, и т.д.) называются *скалярами*. Скаляры – это обычные числа.

А теперь приведем общепринятые определения для векторов.

1. Символом $|\vec{a}|$ обозначается *длина вектора*. Длина (или, по-другому, *модуль*) вектора – это скаляр (число). В частности, если $\vec{a}$ - сила, приложенная к какому-либо телу, то $|\vec{a}|$ - величина (числовое значение в ньютонах) этой силы.

2. Если $|\vec{a}|$=0, то вектор $\vec{a}$ называется *нуль-вектором*, и обозначается он символом $\vec{0}$. Это единственный вектор, у которого нет конкретного направления, ибо его начало и конец совпадают. Среди векторов нуль-вектор играет ту же роль, что и число 0 среди скаляров (чисел).

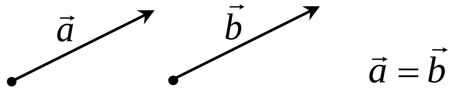


Рис. 2.2

3. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются равными ($\vec{a} = \vec{b}$), если они *сонаправлены* (то есть параллельны друг другу и одинаково направлены), и *имеют одинаковые длины*: $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ - рис. 2.2. Из определения равенства векторов следует, что поступательное перемещение вектора не меняет этого вектора.

4. Сумма $\vec{a}+\vec{b}$ векторов – это вектор $\vec{c}$, который образуется из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ либо по правилу параллелограмма, либо по равносильному ему правилу треугольника – рис. 2.3. Эти правила не надуманные – именно так в природе складываются силы, скорости и другие векторы.

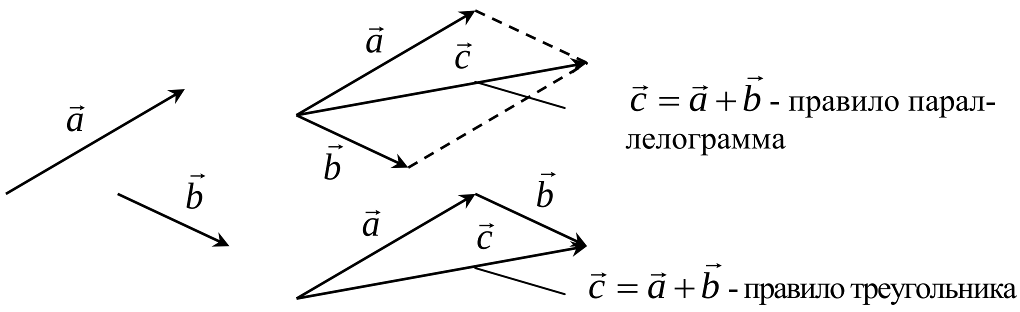


Рис. 2.3

5. Обратным (противоположным) к вектору $\vec{a}$ называется вектор -$\vec{a}$, такой,

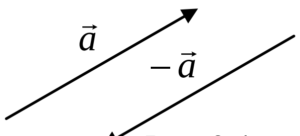


Рис. 2.4

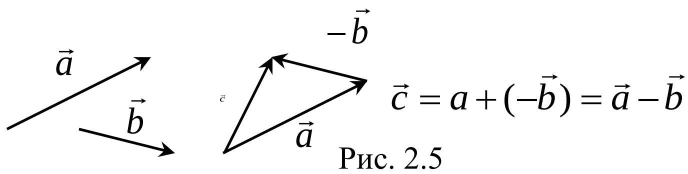


Рис. 2.5

что $\vec{a}$+(-$\vec{a}$)=$\vec{0}$. У векторов $\vec{a}$ и -$\vec{a}$ одинаковые длины и противоположные направления - рис. 2.4.

6. Разность векторов $\vec{a}-\vec{b}$ - это, по определению, вектор $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$. На рис. 2.5 изображен вектор $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, построенный по правилу треугольника.

7. Умножение вектора на число проиллюстрировано на рис. 2.6.

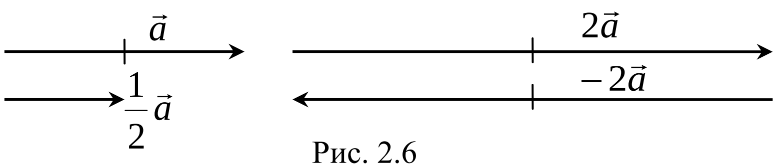


Рис. 2.6

Словесную формулировку правила умножения вектора на число дайте самостоятельно.

8. Ключевым для линейной алгебры понятием, связанным с векторами, является понятие *координат векторов*. О координатах вектора можно говорить, если только вектор рассматривается в системе координат.

а) <u>Декартовы координаты вектора на плоскости</u>

Пусть $\vec{a}$ - произвольный вектор на плоскости xoy, точка $M_1(x_1; y_1)$ - начало вектора, точка $M_2(x_2; y_2)$ - его конец (рис. 2.7). Тогда числа

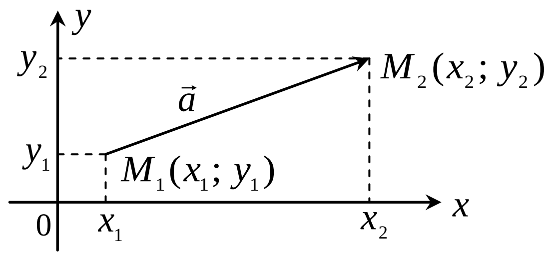


Рис. 2.7

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 = a_x \\ y_2 - y_1 = a_y \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

называются *проекциями вектора* $\vec{a}$ *на оси координат*. А еще они называются *координатами* (декартовыми координатами) вектора $\vec{a}$ на плоскости xoy.

Итак, координаты вектора $\vec{a}$ на плоскости – это его проекции a_x и a_y на оси координат. Они являются числами (скалярами). И определяются они по формулам (1.1). Если хотят указать координаты вектора $\vec{a}$, то пишут: $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y)$.

б) <u>Декартовы координаты вектора в пространстве</u>

Пусть $\vec{a}$ - произвольный вектор в пространстве xyz, точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ -начало вектора, точка $M_2(x_2; y_2; z_2)$ - его конец (рис. 2.8). Тогда числа

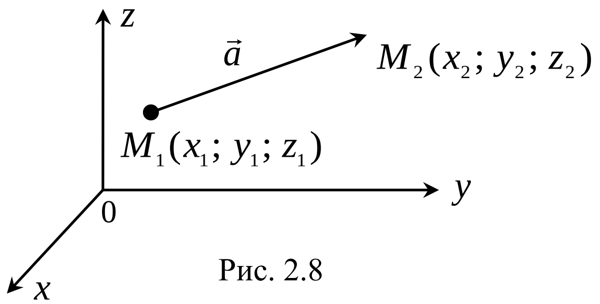


Рис. 2.8

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 = a_x \\ y_2 - y_1 = a_y \\ z_2 - z_1 = a_z \end{array}\right\} \qquad (1.2)$$

- это *проекции вектора* $\vec{a}$ *на оси координат*. Они и называются *координатами* (декартовыми координатами) вектора $\vec{a}$ в пространстве xyz.

Итак, координаты вектора $\vec{a}$ в пространстве – это его проекции a_x, a_y и a_z на оси координат. Они являются числами (скалярами) и определяются по формулам (1.2). Если хотят указать координаты пространственного вектора $\vec{a}$, то пишут: $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y; a_z)$.

У равных векторов, естественно, и одинаковые координаты. И обратно: если у двух векторов одинаковые координаты, то эти векторы равны. Таким образом, координаты вектора однозначно определяют этот вектор.

В частности, зная координаты вектора, легко построить этот вектор. Пусть, например, $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y)$ - некоторый вектор плоскости, где

a_x и a_y - заданные числа. Выбирая по своему усмотрению точку $M_1(x_1; y_1)$ - начало вектора, из формул (1.1) найдем точку $M_2(x_2; y_2)$ - его конец. А зная начало и конец вектора, построим и сам вектор.

Выбирая другое начало вектора, получим и другой его конец. Но это будет тот же вектор, только поступательно перенесенный в другое место.

Зная координаты вектора, легко найти и его модуль (длину) $|\vec{a}|$. То есть найти расстояние от начала вектора до его конца.

Если $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y)$ - вектор на плоскости, точка $M_1(x_1; y_1)$ - начало вектора, точка $M_2(x_2; y_2)$ - его конец, то $|\vec{a}| = |M_1M_2|$. Используя формулу (3.1) главы 1 и учитывая формулы (1.1), получим:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{1.3}$$

А если $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y; a_z)$ - вектор в пространстве, то имеет место аналогичная (1.3) формула:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.4}$$

Действия с координатами векторов

А теперь посмотрим, что делается с координатами векторов при сложении-вычитании векторов и умножении векторов на числа.

Начнем со сложения векторов. Рассмотрим рис. 2.9. Здесь $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ - в соответствии с правилом треугольника. При этом

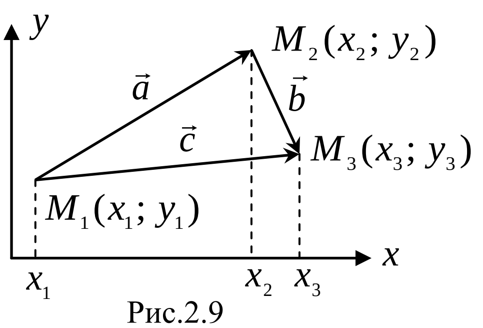


Рис.2.9

$\begin{cases} a_x = x_2 - x_1 \\ a_y = y_2 - y_1 \end{cases}$; $\begin{cases} b_x = x_3 - x_2 \\ b_y = y_3 - y_2 \end{cases}$; $\begin{cases} c_x = x_3 - x_1 \\ c_y = y_3 - y_1 \end{cases}$.

Отсюда следует, что $\begin{cases} c_x = a_x + b_x \\ c_y = a_y + b_y \end{cases}$.

То есть *__при сложении векторов их координаты складываются__*. А при вычитании, естественно, вычитаются.

Перейдем к умножению векторов на числа. При умножении вектора на число вектор меняет свои размеры (а если это число отрицательное – то и меняет направление). Соответствующим образом, очевидно, меняются и его координаты.

Например, при умножении вектора на 2 он становится вдвое длиннее. Вдвое больше, естественно, станут и его проекции на оси координат, то есть координаты вектора – они тоже умножатся на 2. Аналогичной будет ситуация при умножении вектора на любое другое число.

Таким образом, *при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число*.

Итак, при заданных координатах векторов *основные арифметические операции с векторами (сложение-вычитание векторов и умножение их на числа) сводятся к соответствующим операциям с их координатами*.

Пример 1. В точке A приложены силы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенные на рис. 2.10. Построить силу $\vec{c}$, приложенную к точке A, если $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

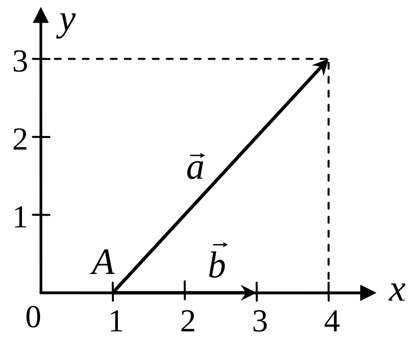


Рис. 2.10

Решение. Найдем координаты сил (векторов) $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\begin{cases} a_x = x_2 - x_1 = 4 - 1 = 3 \\ a_y = y_2 - y_1 = 3 - 0 = 3 \end{cases}; \quad \vec{a} = \vec{a}(3;\, 3)$$

$$\begin{cases} b_x = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2 \\ b_y = y_2 - y_1 = 0 - 0 = 0 \end{cases}; \quad \vec{b} = \vec{b}(2;\, 0)$$

Так как $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$, то $\begin{cases} c_x = a_x - 2b_x = 3 - 2\cdot 2 = -1 \\ c_y = a_y - 2b_y = 3 - 2\cdot 0 = 3 \end{cases}$. Значит, $\vec{c} = \vec{c}(c_x;\, c_y) = \vec{c}(-1;\, 3)$. Но $\begin{cases} c_x = x_2 - x_1 \\ c_y = y_2 - y_1 \end{cases}$, где $(x_1;\, y_1)$ - координаты начала вектора $\vec{c}$, а $(x_2;\, y_2)$ - координаты его конца. Так как $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ - координаты начала вектора $\vec{c}$ (координаты точки A), то $\begin{cases} x_2 = c_x + x_1 = -1 + 1 = 0 \\ y_2 = c_y + y_1 = 3 + 0 = 3 \end{cases}$. Таким образом, конец вектора $\vec{c}$ - это точка $B(0;\, 3)$. Сам вектор $\vec{c}$ изображен на рис. 2.11.

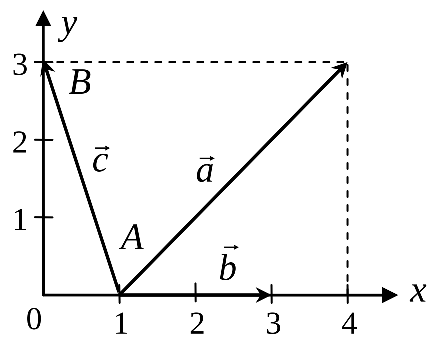


Рис. 2.11

Совершенно аналогичным образом, через соответствующие операции с их координатами, выполняются арифметические операции и с векторами в пространстве. Только у пространственных векторов не две, а три координаты.

А теперь перейдем к рассмотрению векторов не как направленных отрезков (на плоскости или в пространстве), а с более общей точки зрения. Это позволит использовать векторы не только в физике, но и в экономике и в других, далеких от физики, науках.

1.2. Обобщение понятия вектора

Обобщенным вектором (или просто *вектором*) называется *любой упорядоченный набор чисел*. Например, числовой набор (1; 3; -4) есть вектор. Обозначим его символом $\vec{a}$. Тогда $\vec{a}$=(1; 3; -4). Числа (1; 3; -4) называются *компонентами* вектора (хотя часто их называют и *координатами* вектора – как у геометрических векторов).

Отметим, что обобщенные векторы с двумя и тремя компонентами можно рассматривать и как геометрические векторы, декартовыми координатами которых будут компоненты этих обобщенных векторов. Например, обобщенный вектор $\vec{a}$=(1; 3; -4) можно рассматривать как геометрический пространственный вектор $\vec{a}=\vec{a}(1;3;-4)$. И наоборот.

Число компонент вектора называется его *размерностью*. Вектор $\vec{a}$ - трехмерный вектор. А вот вектор $\vec{b}$ =(2; 0; -1; 3) – вектор четырехмерный. И если трехмерный вектор $\vec{a}$=(1; 3; -4) мы еще можем представить себе как геометрический пространственный вектор с координатами ($a_x=1;\ a_y=3;\ a_z=-4$), то четырехмерный вектор $\vec{b}$ =(2; 0; -1; 3) в качестве геометрического вектора с четырьмя координатами непредставим, ибо его нужно изображать в четырехмерном пространстве. А оно наглядно непредставимо. Тем более наглядно непредставимы 5-мерные, 6-мерные и т.д. векторы.

Но зато вектору любой размерности легко придать наглядный экономический (да и не только экономический) смысл. Например, компоненты четырехмерного вектора $\vec{b}$ =(2; 0; -1; 3) могут указывать прибыль фирмы (скажем, в млн. рублей) за последние 4 года. Или изменения, происходившие в дневной температуре в последние 4 дня. Или изменения в окружности талии, произошедшие за время сессии у 4 студенток, живущих в одной комнате. Или еще что-нибудь.

Компоненты данного вектора $\vec{a}$ можно располагать в строку или в столбец. Соответственно получается либо *вектор-строка*, либо *вектор-столбец*:

$$\vec{a}=(a_1;a_2;....a_n) \text{ - } n\text{-мерный вектор-строка}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ - } n\text{-мерный вектор-столбец} \qquad (1.5)$$

Обычно вектор-строку и вектор-столбец не различают. Но мы их будем различать, ибо в теории матриц, о которой речь будет идти в следующем параграфе, это различие учитывается.

1.3. Действия с обобщенными векторами

1. Преобразование вектора-строки в вектор-столбец и наоборот называется *транспонированием вектора*. Транспонированный вектор $\vec{a}$ обозначается символом $\vec{a}^T$. Например, если $\vec{a} = (1; 3; 4)$, то $\vec{a}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. И обратно, если $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, то $\vec{a}^T = (1; 3; 4)$. Ясно, что для любого вектора

$$\left(\vec{a}^T\right)^T = \vec{a} \qquad (1.6)$$

2. Два вектора считаются *равными*, если:

а) оба они векторы-строки или векторы-столбцы;

б) они имеют одинаковую размерность;

в) их соответствующие компоненты попарно равны.

Понятия больше-меньше для векторов не вводятся.

3. Вектор, все компоненты которого равны нулю, называется *нулевым вектором* (нуль-вектором):

$$\vec{0} = (0; 0; \ldots 0) \text{ - нуль-вектор} \qquad (1.7)$$

4. Векторы одинаковой размерности можно *складывать и вычитать*. При этом складывают (вычитают) их компоненты. То есть если $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots. a_n)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; \ldots. b_n)$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \vec{c} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; \ldots a_n \pm b_n) \qquad (1.8)$$

В частности, $\vec{a} \pm \vec{0} = \vec{a}$. Векторы разной размерности складывать (вычитать) нельзя.

5. *Умножение вектора на число* определяется правилом: все компоненты вектора умножаются на это число. То есть если $\vec{a} = (a_1; a_2; \ldots. a_n)$ - некоторый вектор, и λ - некоторое число, то

$$\lambda\vec{a} = \vec{b} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \ldots \lambda a_n) \qquad (1.9)$$

Операции 4 и 5 удовлетворяют следующим очевидным свойствам:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ - ассоциативность;

3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (λ - число)

4) $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$ (λ_1 и λ_2 - числа) (1.10)

5) $\lambda_1(\lambda_2\vec{a})=\lambda_2(\lambda_1\vec{a})$ (λ_1 и λ_2 - числа)

6) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

7) $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$

8) $-1\cdot\vec{a}=-\vec{a}$ - вектор, обратный вектору $\vec{a}$: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

6. Если $\vec{a}=(a_1;\, a_2;\, ...a_n)$ и $\vec{b}=(b_1;\, b_2;\, ...b_n)$ - векторы одинаковой размерности, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \tag{1.11}$$

- *скалярное произведение* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такое произведение может иметь самый разный, в том числе и экономический, смысл. Пусть, например, $\vec{a}=(a_1;\, a_2;\, ...a_n)$ - вектор количества n различных товаров, а вектор $\vec{b}=(b_1;\, b_2;\, ...b_n)$ - вектор цен единиц этих товаров (b_i - цена единицы i-го товара). Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=M$ - общая стоимость всех этих товаров.

1.4. Линейные комбинации векторов. Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Пусть $\{\vec{a}_1;\, \vec{a}_2;\ldots\vec{a}_k\}$ - некоторая совокупность k векторов одой и той же размерности (размерности n). Тогда вектор

$$\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_k\vec{a}_k, \tag{1.12}$$

где $\{\lambda_1;\, \lambda_2;\ldots\lambda_k\}$ - некоторые числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\{\vec{a}_1;\, \vec{a}_2;\ldots\vec{a}_k\}$. При этом говорят, что вектор $\vec{b}$ *линейно выражается* через векторы $\{\vec{a}_1;\, \vec{a}_2;\ldots\vec{a}_k\}$. Он, естественно, будет той же размерности, что и эти векторы.

Определение. Система (совокупность) векторов $\{\vec{a}_1;\, \vec{a}_2;\ldots\vec{a}_k\}$ называется *линейно зависимой* (сокращенно ЛЗ), если существуют такие числа $\{\lambda_1;\, \lambda_2;\ldots\lambda_k\}$, не все равные нулю, что

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_k\vec{a}_k=\vec{0} \tag{1.13}$$

Если же это равенство возможно лишь при $\{\lambda_1=0;\, \lambda_2=0;\ldots\lambda_k=0\}$, то эта система векторов называется *линейно независимой* (ЛНЗ).

Если система векторов $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_k\}$ ЛЗ, то выбрав в (1.13) слагаемое с $\lambda_s \neq 0$, можно линейно выразить вектор $\vec{a}_s$ через остальные векторы.

Действительно, пусть, например, в (1.13) $\lambda_1 \neq 0$. Тогда из (1.13) можно линейно выразить вектор $\vec{a}_1$ через остальные векторы системы:

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a}_3 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{a}_k \qquad (1.14)$$

И обратно: если в системе векторов $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_k\}$ хотя бы один вектор (например, $\vec{a}_1$) линейно выражается через остальные векторы, то эта система ЛЗ.

Действительно, пусть $\vec{a}_1 = \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k$. Тогда

$$(-1)\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0} \qquad (1.15)$$

Так как в равенстве (1.15) $\lambda_1 = -1 \neq 0$, то система векторов $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_k\}$ ЛЗ.

В частности, два геометрических вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ (на плоскости или в пространстве) будут ЛЗ тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через другой: $\vec{a}_2 = \lambda_1\vec{a}_1$. Если $\lambda_1 \succ 0$, то вектор $\vec{a}_2$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{a}_1$. А если $\lambda_1 \prec 0$, то вектор $\vec{a}_2$ направлен противоположно вектору $\vec{a}_1$. В любом случае векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ оказываются параллельными (*коллинеарными)* друг другу.

Показателем коллинеарности векторов является пропорциональность их компонент (координат). Например, трехмерные геометрические векторы $\vec{a}_1(2; -1; 3)$ и $\vec{a}_2(-4; 2; -6)$ коллинеарны, ибо их координаты пропорциональны:

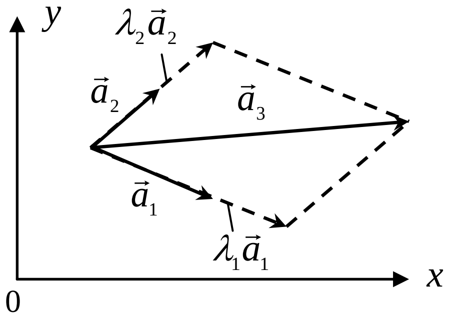
$$\frac{-4}{2} = \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = -2.$$

А, значит, эти векторы и линейно зависимы: $\vec{a}_2 = -2\vec{a}_1$.

А три трехмерных геометрических вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ будут ЛЗ в том и только в том случае, когда один из них может быть линейно выражен через два других: например, $\vec{a}_3 = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$. И будет это в том и только в том случае, когда все три вектора *компланарны* (лежат в одной плоскости).

Действительно, пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ линейно зависимы и, значит, $\vec{a}_3 = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$. Вектор $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$ при любых λ_1 и λ_2 лежит в той же плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. А, значит, и вектор $\vec{a}_3 = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$ тоже должен лежать в этой же плоскости. То есть все три вектора будут компланарны.

Обратно, пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ компланарны. Если среди них есть пара коллинеарных векторов, например, $\vec{a}_3$ и $\vec{a}_1$, то $\vec{a}_3 = \lambda_1\vec{a}_1$, и, значит, можем записать: $\vec{a}_3 = \lambda_1\vec{a}_1 + 0\cdot\vec{a}_2$. Таким образом, один из векторов линейно выражается через два других. А это значит, что векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ ЛЗ. Если же среди трех компланарных векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ нет коллинеарных, то любой из них может быть линейно выражен через два других. Например, всегда можем подобрать такие λ_1 и λ_2, что будет иметь место равенство: $\vec{a}_3 = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$. Для этого на продолжениях векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, как на сторонах, нужно построить параллелограмм, диагональю которого будет вектор $\vec{a}_3$ - рис. 2.12. Значит, и в этом случае компланарные векторы будут ЛЗ.



$$\vec{a}_3 = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$$

Рис. 2.12

Если же векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ некомпланарны, то они заведомо ЛНЗ.

Отметим еще два обстоятельства, связанных с линейной зависимостью векторов.

а) Любая система векторов, содержащая нуль-вектор, всегда ЛЗ.

Действительно, пусть в системе векторов $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \ldots \vec{a}_k\}$ вектор $\vec{a}_1 = \vec{0}$. Тогда

$$1\cdot\vec{0} + 0\cdot\vec{a}_2 + 0\cdot\vec{a}_3 + \ldots + 0\cdot\vec{a}_k = \vec{0} \qquad (1.16)$$

И, значит, система векторов $\{\vec{0}; \vec{a}_2; \vec{a}_3 \ldots \vec{a}_k\}$ является ЛЗ.

б) Любая система n - мерных векторов, содержащая $k \succ n$ векторов, является ЛЗ. То есть любая система из 3, 4 и более двумерных векторов ЛЗ; любая система из 4, 5 и более трехмерных векторов ЛЗ, и т.д. Это важное утверждение оставим пока без доказательства – подтвердим его позже, в §3 при рассмотрении систем линейных уравнений.

Пример 1. Показать, что трехмерные векторы $\vec{a}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; 1; 0)$, $\vec{a}_3 = (0; 1; 1)$ составляют ЛНЗ систему векторов.

<u>Решение</u>. Составим для этих векторов равенство (1.13): $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=\vec{0}$, и выясним, для каких $\{\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\}$ оно будет выполняться:

$$\lambda_1\cdot(1;0;0)+\lambda_2\cdot(1;1;0)+\lambda_3\cdot(0;1;1)=(0;0;0).$$

Отсюда следует:

$$(\lambda_1+\lambda_2;\ \lambda_2+\lambda_3;\ \lambda_3)=(0;0;0)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}.$$

Таким образом, равенство $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=\vec{0}$ выполняется лишь при $\{\lambda_1=0;\lambda_2=0;\lambda_3=0\}$. А это значит, что система векторов $\{\vec{a}_1;\vec{a}_2;\vec{a}_3\}$ ЛНЗ.

<u>Пример 2</u>. Показать, что трехмерные векторы $\vec{a}_1=(2;0;-2)$, $\vec{a}_2=(0;2;-2)$, $\vec{a}_3=(1;1;-2)$ составляют ЛЗ систему векторов.

<u>Решение</u>. Составим для этих векторов равенство (1.13): $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=\vec{0}$, и выясним, для каких $\{\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\}$ оно будет выполняться:

$$\lambda_1\cdot(2;0;-2)+\lambda_2\cdot(0;2;-2)+\lambda_3\cdot(1;1;-2)=(0;0;0)$$

Отсюда следует:

$$(2\lambda_1+\lambda_3;\ 2\lambda_2+\lambda_3;\ -2\lambda_1-2\lambda_2-2\lambda_3)=(0;0;0)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}2\lambda_1+\lambda_3=0\\ 2\lambda_2+\lambda_3=0\\ -2\lambda_1-2\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\lambda_1=-\dfrac{1}{2}\lambda_3\\ \lambda_2=-\dfrac{1}{2}\lambda_3\\ \lambda_3=-\ \textit{любое число}\end{cases}\quad \text{Например, }\begin{cases}\lambda_3=-2\\ \lambda_1=1\\ \lambda_2=1\end{cases}.$$

Подставив эти значения $\{\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\}$ в равенство $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=\vec{0}$, получим:

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2-2\vec{a}_3=\vec{0}.$$

Это равенство наглядно свидетельствует, что векторы $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3\}$ ЛЗ. Более того, любой из них можно выразить через два других:

$$\vec{a}_1 = 2\vec{a}_3 - \vec{a}_2; \quad \vec{a}_2 = 2\vec{a}_3 - \vec{a}_1; \quad \vec{a}_3 = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2.$$

Пример 3. Подтвердить, что векторы $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (0; -1; 3)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; 0)$, $\bar{a}_4 = (1; 0; -1)$ ЛЗ.

Р*ешение*. Здесь все просто: так как данные векторы трехмерные, а их число больше трех, то они заведомо ЛЗ.

1.5. Векторное пространство и его базис

Геометрические и обобщенные векторы вводились выше таким образом, что после определения этих векторов сразу вводились и две ключевые линейные операции с этими векторами: сложение векторов друг с другом и умножение векторов на числа. Причем и сумма векторов, и произведение вектора на число оказывались векторами той же природы и той же размерности, что и исходные векторы. И свойства линейных операций для геометрических и обобщенных векторов были идентичны: свойства (1.10) для обобщенных векторов имеют место и для геометрических векторов.

То есть векторы одной и той же природы (геометрические векторы на плоскости; геометрические векторы в пространстве; обобщенные векторы одной и той же размерности n) представляют собой не просто бессистемный набор векторов. Это структурированные множества векторов. Для векторов, которые образуют эти множества, введены линейные операции, осуществляемые по вполне определенным правилам. И результатом этих операций являются векторы этого же множества. Такие множества векторов называются в линейной алгебре *векторными пространствами*.

Поэтому множество всех возможных векторов данной размерности n - это векторное пространство, которое обозначается символом R^n. В частности, R^2 - множество всех векторов с двумя компонентами. Эти векторы можно представлять себе и как геометрические векторы на плоскости, если считать их компоненты их декартовыми координатами. То есть множество R^2 - это, по существу, множество всех геометрических векторов на плоскости. А R^3 - множество всех трехмерных векторов, то есть множество всех геометрических векторов в пространстве. Но при $n \succ 3$ векторное пространство R^n как пространство геометрических векторов уже наглядно непредставимо – его можно понимать лишь как пространство обобщенных векторов.

Основная теорема.

В векторном пространстве R^n всегда можно выбрать n ЛНЗ векторов $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_n\}$. Причем сделать это можно множеством разных способов. Через любой набор этих n векторов можно линейно выразить любой вектор $\vec{b}$ из пространства R^n:

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \tag{1.17}$$

Векторы $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_n\}$, через которые можно линейно выразить любой вектор $\vec{b}$ векторного пространства R^n, называются *базисными* (фундаментальными). Они образуют *базис* (фундамент) векторного пространства R^n. А числа $\{\lambda_1; \lambda_2; \dots \lambda_n\}$, фигурирующие в формуле (1.17), называются *координатами вектора* $\vec{b}$ *в базисе векторов* $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_n\}$. Сама формула (1.17) называется *разложением вектора* $\vec{b}$ *по базисным векторам* $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_n\}$.

Сначала докажем, что разложение (1.17), если оно существует, при выбранном базисе единственно. Действительно, если предположить, что существует какое-то другое, отличное от (1.17), разложение вектора $\vec{b}$ по базисным векторам:

$$\vec{b} = \lambda_1^* \vec{a}_1 + \lambda_2^* \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n^* \vec{a}_n,$$

то вычитая это равенство из равенства (1.17), получим:

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \lambda_1^*)\vec{a}_1 + (\lambda_2 - \lambda_2^*)\vec{a}_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_n^*)\vec{a}_n$$

Но так как векторы $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_n\}$ ЛНЗ, то это равенство возможно, лишь когда в нем все числовые скобки – нули. То есть когда $\lambda_1^* = \lambda_1; \lambda_2^* = \lambda_2; \dots \lambda_n^* = \lambda_n$. А это и подтверждает тот факт, что разложение любого вектора $\vec{b}$ по базисным векторам единственно.

Теперь подтвердим существование базиса. Самый простой базис в пространстве R^n образуют следующие n единичных векторов:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = (1; 0; 0; \dots .0) \\ \vec{e}_2 = (0; 1; 0; \dots .0) \\ \vec{e}_3 = (0; 0; 1; \dots .0) \\ --------- \\ \vec{e}_n = (0; 0; 0; \dots .1) \end{cases} \tag{1.18}$$

Эти векторы ЛНЗ, так как равенство $\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n=\vec{0}$ принимает вид

$$(\lambda_1;\lambda_2;\ldots\lambda_n)=(0;0;\ldots.0)$$

и, таким образом, выполняется лишь при $\{\lambda_1=0;\lambda_2=0;\ldots\lambda_n=0\}$. А это и свидетельствует о линейной независимости векторов $\{\vec{e}_1;\vec{e}_2;\ldots\vec{e}_n\}$. Далее, если $\vec{b}=(b_1;b_2;\ldots b_n)$ - произвольный вектор из пространства R^n, то имеет место очевидное равенство:

$$\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+\ldots+b_n\vec{e}_n \qquad (1.19)$$

То есть любой вектор из R^n разлагается по векторам $\{\vec{e}_1;\vec{e}_2;\ldots\vec{e}_n\}$. А, значит, эти векторы действительно образуют базис в векторном пространстве R^n. При этом получают свой смысл компоненты $(b_1;b_2;\ldots b_n)$ вектора $\vec{b}$: как оказывается, они являются координатами этого вектора в базисе единичных векторов $\{\vec{e}_1;\vec{e}_2;\ldots\vec{e}_n\}$.

В частности, в векторном пространстве R^2 (в пространстве векторов на плоскости) базис образуют векторы $\vec{e}_1=(1;0)$ и $\vec{e}_2=(0;1)$, которые обычно обозначаются символами $\vec{i}$ и $\vec{j}$ соответственно, и которые представляют собой геометрические единичные векторы $\vec{i}=\vec{i}(1;0)$ и $\vec{j}=\vec{j}(0;1)$ осей координат плоскости xoy (рис. 2.12). При этом если $\vec{a}=(a_x;a_y)$ - любой другой вектор из пространства R^2, то есть любой другой геометрический вектор $\vec{a}=\vec{a}(a_x;a_y)$ плоскости xoy, то имеет место следующее разложение этого вектора по базисным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$:

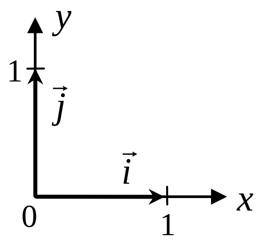


Рис. 2.12

$$\vec{a}=\vec{a}(a_x;a_y)=a_x\cdot\vec{i}+\vec{a}_y\cdot\vec{j} \qquad (1.20)$$

Таким образом, декартовы координаты a_x и a_y геометрического вектора $\vec{a}=\vec{a}(a_x;a_y)$ на плоскости - это компоненты двумерного вектора $\vec{a}=(a_x;a_y)$ в базисе единичных векторов $\vec{i}=\vec{i}(1;0)=(1;0)$ и $\vec{j}=\vec{j}(0;1)=(0;1)$. Геометрическая иллюстрация равенства (1.20) представлена на рис. 2.13.

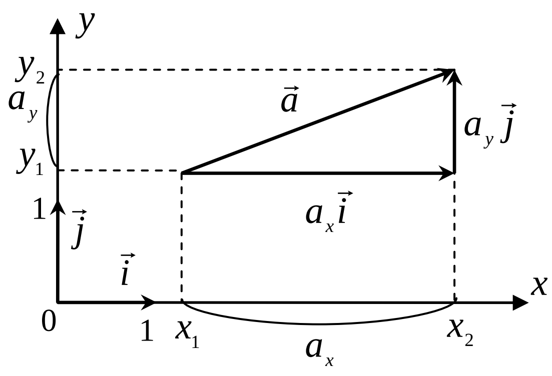


Рис. 2.13

А в пространстве R^3 (в трехмерном пространстве) базис образуют единичные векторы

$\vec{e}_1 = (1; 0; 0) = \vec{i}$;

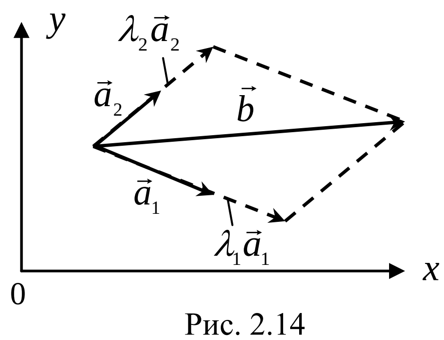
$\vec{e}_2 = (0; 1; 0) = \vec{j}$;

$\vec{e}_3 = (0; 0; 1) = \vec{k}$. (1.21)

Это – единичные векторы осей координат ox, oy и oz соответственно. И любой трехмерный вектор $\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y; a_z) = \, = (a_x; a_y; a_z)$ линейно выражается через эти базисные векторы $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$:

$$\vec{a} = \vec{a}(a_x; a_y; a_z) = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \tag{1.22}$$

Отметим, что базис единичных векторов $(\vec{i}; \vec{j})$ на плоскости (в пространстве R^2), как и базис единичных векторов $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ в пространстве R^3, не единственный. На плоскости в качестве базисных векторов можно взять пару любых неколлинеарных (не параллельных друг другу) векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Они линейно независимы, и через них можно линейно выразить любой другой вектор $\vec{b}$ этой плоскости, построив на продолжениях векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, как на сторонах, параллелограмм с диагональю $\vec{b}$ - рис. 2.13.



$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$

Рис. 2.14

Согласно этому рисунку, координаты $(\lambda_1; \lambda_2)$ вектора $\vec{b}$ в базисе векторов $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2\}$ являются проекциями вектора $\vec{b}$ на базисные векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ соответственно. И если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не перпендикулярны друг другу, то проекциями не перпендикулярными – косоугольными.

Аналогично в векторном пространстве R^3 в качестве базисных можно взять любые три некомпланарных (не лежащих в одной плоскости) вектора $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3\}$. Они, как было показано выше, линейно независимы, и через них можно линейно выразить любой другой пространственный вектор $\vec{b}$, построив на продолжениях векторов

$\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3\}$, как на ребрах, параллелепипед с диагональю $\vec{b}$. В итоге получим разложение $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$, в котором координатами $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3)$ вектора $\vec{b}$ будут косоугольные проекции этого вектора на базисные векторы.

Точно так же базис единичных векторов $\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \dots \vec{e}_n\}$ в пространстве R^n не единственный. Просто он простейший из всех базисов векторного пространства R^n. Как утверждает *основная теорема* (см. выше), *любой набор n линейно независимых векторов $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots \vec{a}_n\}$ этого пространства может быть принят за его базис*. Для случаев n =2 и n =3, допускающих геометрическое рассмотрение, мы это только что доказали. А для $n \succ 3$ это общее утверждение оставим пока без доказательства. Оно будет доказано позже, при рассмотрении систем линейных уравнений.

Упражнения

1. Даны два двумерных вектора $\vec{a}_1 = (1; 1)$ и $\vec{a}_2 = (2; 0)$. Образуют ли они базис векторного пространства R^2?

Решение. Данные векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис пространства R^2, если произвольный вектор $\vec{b} = (b_1; b_2)$ этого пространства можно представить в виде линейной комбинации этих векторов: $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$, где λ_1 и λ_2 - некоторые числа. Развернем это равенство:

$$(b_1; b_2) = \lambda_1 \cdot (1; 1) + \lambda_2 \cdot (2; 0) \Rightarrow (b_1; b_2) = (\lambda_1 + 2\lambda_2; \lambda_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = b_1 \\ \lambda_1 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = b_2 \\ \lambda_2 = \dfrac{b_1 - b_2}{2} \end{cases}$$

Таким образом, нужные числа λ_1 и λ_2 существуют для любого $\vec{b} = (b_1; b_2)$ из векторного пространства R^2. Значит, данные векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис R^2. И найденные числа λ_1 и λ_2 - координаты вектора $\vec{b}$ в этом базисе.

Второй способ. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис пространства R^2, если они ЛНЗ. То есть если равенство $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 = \vec{0}$ имеет место лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Проверим, так ли это:

$$\lambda_1 \cdot (1; 1) + \lambda_2 \cdot (2; 0) = (0; 0) \Rightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2; \lambda_1) = (0; 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Итак, векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ ЛНЗ, а, значит, они образуют базис векторного пространства R^2.

<u>*Третий способ*</u>. Если представить себе векторы $\vec{a}_1 = (1;1)$ и $\vec{a}_2 = (2;\,0)$ как геометрические векторы $\vec{a}_1(1;1)$ и $\vec{a}_2(2;\,0)$ на плоскости xoy, выходящие, например, из начала координат, то их концами будут точки $M_1(1;1)$ и $M_2(2;\,0)$. Значит, они неколлинеарны (не лежат на одной прямой). Кстати, их неколлинеарность следует и из того, что их координаты непропорциональны. Но если они неколлинеарны, то они и ЛНЗ. А, значит, они образуют базис векторов на плоскости (в пространстве R^2).

2. На плоскости xoy даны точки $A(2;\,2)$, $B(-2;\,2)$, $C(-2;\,0)$. В начале координат приложены силы $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$. Построить силу $\vec{F} = \overrightarrow{OM}$, являющуюся равнодействующей этих сил. Найти ее координаты и величину. Разложить все четыре силы по базисным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

<u>*Ответ*</u>: точка $M(-2;\,4)$ - конец силы $\vec{F} = \overrightarrow{OM}$; $|F| = \sqrt{20}$; $\vec{F}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{F}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{F}_3 = -2\vec{i}$; $\vec{F} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$.

3. Показать, что силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, о которых шла речь в предыдущем упражнении, составляют линейно зависимую (ЛЗ) систему векторов. Выразить каждую из этих сил через две другие.

<u>*Ответ*</u>: $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 + 2\vec{F}_3 = \vec{0}$.

4. На плоскости xoy даны три вектора: $\vec{a}(3;-1)$, $\vec{b}(1;-2)$, $\vec{c}(-1;1)$. Найти длину вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Разложить вектор $\vec{p}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

<u>*Ответ:*</u> $|\vec{p}| = 5$; $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

5. Доказать, что система векторов будет линейно зависима, если она содержит: *а*) два равных вектора; *б*) два пропорциональных вектора.

6. Доказать, что в векторном пространстве R^2:

а) векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линейно независимы;

б) любые два коллинеарных вектора линейно зависимы;

в) любые три вектора линейно зависимы.

7. Выяснить, образуют ли базис векторного пространства R^3 векторы:

$$\vec{a}_1 = (1;1;1),\ \ \vec{a}_2 = (1;\,0;1),\ \ \vec{a}_3 = (2;1;\,2).$$

<u>*Ответ*</u>: не образуют.

8. Показать, что точки $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$, $D(5;0;-6)$, заданные в декартовой системе координат, лежат в одной плоскости.

9. В пространстве двух товаров с ценами единиц этих товаров (3; 5) соответственно укажите несколько наборов товаров стоимостью 15. Далее, пусть цены изменились и стали (4; 4). Приведите примеры наборов товаров, которые подешевели, подорожали, остались той же стоимости.

Решение. Пусть a_1 - количество единиц первого товара, a_2 - второго. Тогда вектор $\vec{a}=(a_1;a_2)$ - двумерный вектор количества этих товаров (набор товаров). Если вектор $\vec{b}=(3;5)$ - вектор цен единиц этих товаров, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=3a_1+5a_2=M$ - совокупная стоимость набора товаров. И если M =15, то $3a_1+5a_2=15$. А это – уравнение с двумя неизвестными a_1 и a_2, которое, очевидно, имеет бесчисленное количество решений. Приведем несколько вариантов этих решений:

1) $\{a_1=0;\,a_2=3\}$; 2) $\{a_1=5;\,a_2=0\}$; 3) $\{a_1=1;\,a_2=2{,}4\}$; $(\ldots.)$

То есть получаем следующие наборы товаров: 1) $\vec{a}_1=(0;3)$; 2) $\vec{a}_2=(5;0)$; 3) $\vec{a}_3=(1;2{,}4)$; $(\ldots)$

Если вектор цен $\vec{b}$ изменился и стал $\vec{b}=(4;4)$, то стоимость M набора $\vec{a}=(a_1;a_2)$ станет такой: $M=\vec{b}\cdot\vec{a}=4a_1+4a_2$. Набор $\vec{a}_1=(0;3)$, имевший в ценах $\vec{b}=(3;5)$ стоимость M =15, при новых ценах $\vec{b}=(4;4)$ будет иметь стоимость $M_1=4\cdot0+4\cdot3=12$, то есть подешевеет. Подешевеет и набор $\vec{a}_3=(1;2{,}4)$, ибо он уже будет иметь стоимость $M_3=4\cdot1+4\cdot2{,}4=13{,}6$. А вот набор $\vec{a}_2=(5;0)$ подорожает, ибо будет иметь стоимость $M_2=4\cdot5+4\cdot0=20$.

Теперь найдем такой набор товаров $\vec{a}=(a_1;a_2)$, стоимость которого и в новых ценах останется 15, то есть не изменится. Для этого набора будем иметь:

$$\begin{cases}3a_1+5a_2=15\\4a_1+4a_2=15\end{cases}\Rightarrow\ (\ldots.)\ \Rightarrow\ \begin{cases}a_1=1\dfrac{7}{8}\\a_2=1\dfrac{7}{8}\end{cases};\qquad \vec{a}=(1\frac{7}{8};\ 1\frac{7}{8}).$$

10. Магазин торгует гвоздями двух видов – короткими и длинными, по цене 50 руб/кг и 70 руб/кг соответственно. Масса короткого гвоздя – 5 г, длинного - 10 г. Покупатель хотел бы купить гвоздей на 100 рублей. Причем длинных гвоздей (в штуках) он хотел бы купить в 2 раза больше, чем коротких. Сколько штук тех и других гвоздей ему удастся купить?

Решение. Пусть $\vec{a} = (a_1; a_2)$ вектор количества гвоздей (в штуках), где a_1 - количество гвоздей коротких, а a_2 - длинных. Тогда $m_1 = 0{,}005a_1$(кг) и $m_2 = 0{,}010a_2$(кг) – массы гвоздей, а $c_1 = 50m_1 = 0{,}25a_1$(руб.) и $c_2 = 70m_2 = 0{,}70a_2$(руб.) – стоимости гвоздей. По условию, $c_1 + c_2 = 100$. То есть

$$0{,}25a_1 + 0{,}70a_2 = 100 \Rightarrow 25a_1 + 70a_2 = 10000 \Rightarrow 5a_1 + 14a_2 = 2000.$$

По условию $a_2 = 2a_1$. Значит, $33a_1 = 2000;\quad a_1 \approx 60{,}6;\quad a_2 = 2a_1 \approx 121{,}2$. Округляя до целых (по недостатку), получим: $\{a_1 = 60;\ a_2 = 120\}$. Общая стоимость этих гвоздей

$$c = c_1 + c_2 = 0{,}25 \cdot a_1 + 0{,}70 \cdot a_2 = 0{,}25 \cdot 60 + 0{,}70 \cdot 120 = 99\,(\text{руб.}).$$

Еще один рубль – сдача. Прикинем, что на него можно купить. Так как в килограмме 1000:5=200 коротких гвоздей и 1000:10=100 - длинных гвоздей, то один короткий гвоздь стоит 50руб.:200=25коп., а длинный 70 руб.:100=70коп. Значит, на сдачу в 1 рубль покупатель может еще или купить 4 коротких гвоздя, или один короткий и один длинный, или оставить сдачу неизрасходованной.

§ 2. Матрицы

Обобщением понятий вектора-строки и вектора-столбца является матрица. *Матрица – это прямоугольная таблица чисел*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \dots a_{2n} \\ ------- \\ a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Числа a_{ij} $(i = 1, 2, \dots m;\quad j = 1, 2, \dots n)$, образующие матрицу, называются *элементами* матрицы. А индексы i и j этих элементов – это соответственно номера той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Например, a_{21} - элемент матрицы, расположенный во второй ее строке и в первом столбце.

В матрице A m строк и n столбцов. В связи с этим говорят, что матрица A имеет размер $m \times n$.

Каждую строку матрицы можно считать обобщенным n- мерным вектором, у которого компонентами являются элементы этой строки.

А каждый столбец матрицы – обобщенным m- мерным вектором, компонентами которого являются элементы этого столбца.

Часто, для сокращения записи, матрицу (2.1) записывают в виде:

$$A = \|a_{ij}\| \quad (i = 1, 2, \ldots m; \quad j = 1, 2, \ldots n) \tag{2.2}$$

Или еще короче:

$$\underset{m\times n}{A} = \|a_{ij}\| \tag{2.3}$$

С помощью матриц удобно записывать различного рода объемные данные, в том числе и экономические. Например, в виде матрицы удобно записать данные о валовом сборе зерновых (или каких-то других) культур в хозяйствах некоторого сельскохозяйственного района:

Хозяйство (название или номер по списку)	Культура				
	Пшеница (1)	Рожь (2)	Ячмень (3)	………	Гречиха (n)
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	………	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	………	a_{2n}
………	………	………	………	………	………
m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	………	a_{mn}

Стоки матрицы представляют собой данные о валовом сборе зерновых по отдельным хозяйствам (всего m хозяйств), а столбцы по отдельным культурам (всего n культур). В виде аналогичной матрицы деканат оформляет данные о текущей успеваемости студентов группы или курса: по вертикали – фамилии студентов, по горизонтали – учебные дисциплины, а в качестве элементов a_{ij} этой аттестационной матрицы фигурируют оценки студентов. И примеров такого рода можно, очевидно, привести множество.

Если $m = n$, то есть если число строк матрицы A равно числу ее столбцов, то такая матрица A называется *квадратной матрицей n-го порядка*. А ее диагональные элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ a_{nn}$ образуют так называемую *главную диагональ* матрицы. Если же $m \neq n$, то матрица называется *прямоугольной*.

Простейшие частные случаи матрицы – это матрица, в которой всего одна строка (*матрица-строка*), и матрица, в которой всего один столбец (*матрица–столбец*). Матрица–строка и матрица–столбец –

это фактически обобщенные векторы (соответственно вектор-строка и вектор-столбец – см. §1).

Квадратная матрица

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 \ 0 \ 0 \ldots 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ 0 \ 0 \ldots 1 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

называется *единичной матрицей* E при любом порядке n этой матрицы. У единичной матрицы на главной ее диагонали стоят единицы, а остальные ее элементы – нули. В частности,

$$E = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad E = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

- это единичные матрицы 2-го и 3-го порядков.

Матрица, состоящая из одних нулей, называется *нулевой матрицей* O, какого бы размера она ни была:

$$O = \begin{pmatrix} 0 \ 0 \ 0 \ldots 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ 0 \ 0 \ldots 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Матрицы A и B считаются *равными*, если у них одинаковый размер и все их элементы попарно совпадают.

2.1. Линейные операции с матрицами

Линейные операции с матрицами – это сложение-вычитание матриц и умножение их на числа.

1. *Сложение и вычитание матриц*. Складывать и вычитать можно лишь матрицы одинакового размера. *По определению*, при сложении (вычитании) матриц получается матрица, элементами которой являются суммы (разности) соответствующих элементов складываемых (вычитаемых) матриц.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

то

$$A+B=C=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad A-B=D=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

В частности,

$$A+O=A, \tag{2.7}$$

где O - нулевая матрица того же размера, что и матрица A.

2. _Умножение матриц на число_. По определению, при умножении матрицы на число все ее элементы умножаются на это число.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ то } \quad 3A=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

В частности, произведением любой матрицы на число 0 будет нулевая матрица O того же размера, что и размер матрицы A:

$$0\cdot A=O \tag{2.8}$$

Выпишем теперь очевидные

Свойства линейных операций с матрицами

Пусть A, B и C - матрицы, имеющие одинаковый размер, а α и β - произвольные действительные числа. Тогда очевидно, что:

1) $A+B=B+A$
2) $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$
3) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ (2.9)
4) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
5) $(\alpha\beta)A=(\alpha A)\beta=(\beta A)\alpha$
6) $A\pm O=A$, где O - нулевая матрица
7) $0\cdot A=O$ - нулевая матрица

2.2. Произведение матриц

Перемножение матриц друг с другом – это специфическая операция, лежащая в основе алгебры матриц.

Произведение $A \cdot B$ матриц A и B определено (а, значит, и осуществимо) лишь тогда, когда *в строках первой матрицы A столько же элементов, сколько их в столбцах второй матрицы B*. Или, что одно и то же, когда *число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B*. В этом случае говорят, что *матрица A согласована с матрицей B*.

То есть если матрица A имеет размер $m \times n$, то согласованная с ней матрица B должна иметь размер $n \times k$. Именно в этом случае и в строках матрицы A, и в столбцах матрицы B будет одинаковое число элементов - n.

Будем рассматривать матрицу A как совокупность m векторов-строк $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ размерности n, а матрицу B - как совокупность k векторов-столбцов $\vec{b}_j$ $(j = 1, 2, \ldots k)$ той же размерности n:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \ldots \\ \vec{a}_i \\ \ldots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad \begin{matrix} \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_j \ldots \vec{b}_k \end{pmatrix} \\ \underset{n\times k}{B} = \begin{pmatrix} b_{11}\ b_{12} \ldots b_{1j} \ldots b_{1k} \\ b_{21}\ b_{22} \ldots b_{2j} \ldots b_{2k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\ b_{n2} \ldots b_{nj} \ldots b_{nk} \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{2.10}$$

В силу одинаковой размерности векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_j$ имеет смысл их скалярное произведение c_{ij} для любых $i = 1, 2, \ldots m$ и $j = 1, 2, \ldots k$:

$$c_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} \tag{2.11}$$

Матрица C, элементами которой будут числа c_{ij}, и является, по определению, произведением матрицы A на матрицу B:

$$C = A \cdot B = \left\| c_{ij} \right\| \quad (i = 1, 2, \ldots m; \ \ j = 1, 2, \ldots k). \tag{2.12}$$

Размер матрицы $C = A \cdot B$ равен $m \times k$:

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times k}{B} = \underset{m\times k}{C} \tag{2.13}$$

То есть в матрице $C = A \cdot B$ столько строк, сколько их в матрице A, и столько столбцов, сколько их в матрице B.

<u>*Пример 1*</u>. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Матрица A согласована с матрицей B, ибо в ее строках столько элементов (3), сколько их в столбцах матрицы B (тоже 3).Умножая по формуле (2.11) строки матрицы A на столбцы матрицы B, получим элементы c_{ij} матрицы $C=A\cdot B$:

$c_{11}=1\cdot 0+(-1)\cdot 1+2\cdot 2=3$ $\qquad$ $c_{12}=1\cdot 1+(-1)\cdot 1+2\cdot(-2)=-4$
$c_{21}=0\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 2=8$ $\qquad$ $c_{22}=0\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot(-2)=-4$
$c_{31}=1\cdot 0+4\cdot 1+1\cdot 2=6$ $\qquad$ $c_{32}=1\cdot 1+4\cdot 1+1\cdot(-2)=3$
$c_{41}=0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 2=0$ $\qquad$ $c_{42}=0\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot(-2)=0$

Итак, $A\cdot B=C=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 8 & -4\\ 6 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

В полученной матрице C столько строк (4), сколько их в матрице A, и столько столбцов (2), сколько их в матрице B.

Отметим, что для данных матриц A и B найти произведение $B\cdot A$ невозможно, так как матрица B не согласована с матрицей A: количество элементов в строках матрицы B (2) не равно количеству элементов в столбцах матрицы A (4). Это наглядно указывает на то, что произведение $A\cdot B$ матриц A и B может существовать, а произведение $B\cdot A$ - не существовать. Оба эти произведения будут существовать, если только перемножаются квадратные матрицы одного и того же порядка. При этом и произведение $A\cdot B$, и произведение $B\cdot A$ будут матрицами того же порядка, что и порядок перемножаемых матриц. Но сами матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$ могут не совпадать!

Покажем это на примере.

Пример 2. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}.$$

Найдем произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ (оба они существуют):

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1\ +\ 3\cdot5 & 2\cdot0+3\cdot(-2)\\ 4\cdot1+(-1)\cdot5 & 4\cdot0+(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix};$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2\ +\ 0\cdot4 & 1\cdot3\ +\ 0\cdot(-1)\\ 5\cdot2+(-2)\cdot4 & 5\cdot3+(-2)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 17\end{pmatrix}.$$

Как видим, $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Интересен еще следующий факт: из того, что $A\cdot B=O$ - нулевая матрица, еще не следует, что $A=O$ или $B=O$. Например,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\neq O;\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\neq O,\ \text{но}\ A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O.$$

Точно так же из равенства $A^2=A\cdot A=O$ еще не следует, что $A=O$. Например, если $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, то $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O.$ И это несмотря на то, что $A\neq O$.

Если A - квадратная матрица, и E - единичная матрица того же порядка, что и порядок матрицы A, то легко убедиться в том, что

$$A\cdot E=E\cdot A=A \tag{2.14}$$

А если O - нулевая квадратная матрица того же порядка, что и порядок квадратной матрицы A, то очевидно, что

$$A\cdot O=O\cdot A=O \tag{2.15}$$

2.3. Обратная матрица

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной матрице* A, если

$$A^{-1}\cdot A=E\quad\text{или}\quad A\cdot A^{-1}=E\quad (E\ \text{- единичная матрица}) \tag{2.16}$$

Как оказывается (мы это докажем позже), выполнение одного из равенств (2.16) автоматически обеспечивает выполнение другого.

Пример 3. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Тогда $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ - матрица, обратная матрице A. Действительно:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E;\qquad A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E.$$

Обратные матрицы играют важную роль в теории матриц вообще и в теории систем линейных уравнений в частности. Но это станет ясным позднее, в §5.

Отметим, что обратная матрица может существовать, очевидно, лишь для квадратных матриц. Но не для каждой квадратной матрицы она существует. Об условиях существования матрицы, обратной данной, и о стандартной схеме ее построения мы поговорим позже, в § 5.

<u>*Свойства произведений матриц*</u>.

Пусть A, B и C - матрицы таких размеров, чтобы все указанные ниже произведения этих матриц были определены (существовали), а λ - произвольное действительное число. Тогда имеют место следующие свойства:

1) $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)=A\cdot B\cdot C$

2) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ (2.17)

3) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

4) $\lambda\cdot(A\cdot B)=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)$

Доказательства этих свойств опускаем (попробуйте доказать их самостоятельно).

2.4. Транспонирование матриц

Перемена местами строк и столбцов матрицы называется ее *транспонированием.* Транспонированная матрица A обозначается символом A^T.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&2&4\end{pmatrix},\ \text{то}\ A^T=\begin{pmatrix}2&-3\\1&2\\0&4\end{pmatrix};\quad \left(A^T\right)^T=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&2&4\end{pmatrix}. \qquad (2.18)$$

Этот пример наглядно показывает, что дважды транспонированная матрица совпадает с исходной матрицей:

$$\left(A^T\right)^T=A \qquad (2.19)$$

Важную роль в теории матриц играют *симметричные матрицы*. Таковыми называются те матрицы, для которых $A^T=A$. То есть те матрицы, которые не меняются при перемене местами их строк и столбцов. А это значит, что у симметричных матриц их строки и столбцы совпадают.

Например, симметричной является следующая матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ - симметричная матрица} \tag{2.20}$$

Ясно, что прямоугольная матрица симметричной быть не может, ею может быть только квадратная матрица. Симметричной, очевидно, является единичная матрица E любого порядка.

Отметим следующие два основных свойства транспонированных матриц:

$$1)\ (A+B)^T = A^T + B^T;$$
$$2)\ (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T. \tag{2.21}$$

Первое из них очевидно. А второе вытекает из определения произведения матриц. Действительно, матрица $(A \cdot B)^T$ получается произведением строк матрицы A на столбцы матрицы B, а затем заменой строк на столбцы в поучившейся таблице чисел. Тот же результат мы получим, умножая элементы строк матрицы B^T, то есть столбцов матрицы B, на элементы столбцов матрицы A^T, то есть строк матрицы A.

<u>*Пример 4*</u>. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда (см. пример 1):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -4 \\ 6 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 0 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 0 \\ -4 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видим, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Для любой матрицы A существует произведение $A \cdot A^T$, ибо строки матрицы A становятся столбцами матрицы A^T, так что всегда матрица A согласована с матрицей A^T - число элементов в строках первой из них совпадает с числом элементов в столбцах второй. Точно так же матрица A^T согласована с матрицей A, а потому существует и произведение $A^T \cdot A$. Эти матрицы $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$, вообще говоря, не совпадают. Но обе они симметричны, ибо не меняются при транспонировании. Действительно, применяя вторую из формул (2.21), получаем:

$$(A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T; \; (A^T \cdot A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A. \qquad (2.22)$$

<u>*Пример 5*</u>. Пусть

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$; $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 13 \end{pmatrix}$.

Матрицы $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$ не совпадают. Более того, они разного порядка. Но обе они симметричные.

В заключение этого параграфа отметим, что матрицы являются основным теоретическим аппаратом исследования и решения *систем линейных уравнений*. Из всех возможных систем уравнений системы линейных уравнений являются наиболее простыми и вместе с тем наиболее важными как для самой математики, так и для различных ее приложений. К этим системам мы и переходим.

Упражнения

1. Найти матрицу $C = 3A + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>*Ответ*</u>: $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу $C = A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу $C = 2A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 12 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу $C = A^T \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Найти для матриц A и B предыдущего примера матрицу $C = A \cdot A^T \cdot B$.

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 24 \\ 2 & 1 & 7 \\ -10 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Показать, что заведомо $A \cdot B \neq B \cdot A$, если $A = \underset{2\times 3}{A}$, а $B = \underset{3\times 2}{B}$.

7. Подтвердить, что $(A+B)^T = A^T + B^T$. И подтвердить, что $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Выяснить, является ли матрица $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ матрицей, обратной матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Ответ: является.

9. Построить матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$. Для этой матрицы должны выполняться два условия: $A \cdot A^{-1} = E$ и $A^{-1} \cdot A = E$. Достаточно выполнения одного из них – другое будет выполняться автоматически. Потребуем выполнения первого из них:

$$A \cdot A^{-1} = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ a_1 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \\ b_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -1 \\ b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Проверка</u>.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{ - верно.}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{ - верно.}$$

10. Построить матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>*Ответ*</u>: матрица A^{-1} не существует.

11. Построить матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>*Ответ*</u>: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>*Ответ*</u>: $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>*Ответ*</u>: $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$.

§ 3. Системы линейных уравнений и их решение методом Гаусса

3.1. Общие понятия и определения

Решение различного рода систем уравнений – классическая и часто возникающая (в том числе и в экономике) математическая проблема. В данном параграфе мы остановимся на простейших из систем – *на системах линейных уравнений*. Именно они чаще других находят применение в экономике (да и не только в ней).

Системой линейных уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ -------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

В этой системе m уравнений с n неизвестными (x_1; x_2; $\ldots x_n$). А линейными уравнения, входящие в систему (3.1), называются потому, что неизвестные (x_1; x_2; $\ldots x_n$) этих уравнений входят в них в первой степени (линейно). То есть аналогично тому, как входят в линейную функцию $y = kx + b$ величины x и y.

Систему (3.1) можно записать и в сжатой (сокращенной) форме, используя знак суммирования $\sum$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots m) \tag{3.2}$$

Числа a_{ij} (i = 1, 2,… m; j = 1, 2,… n) – заданные коэффициенты при неизвестных x_j (j = 1, 2,… n); числа b_i (i = 1, 2,… m) – так называемые свободные члены системы, которые тоже заданы.

Систему (3.1) можно записать и в совсем простой и компактной *матричной форме*. Для этого введем следующие матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...\ a_{2n} \\ ------- \\ a_{m1}\ a_{m2}\ ...\ a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -- \\ b_m \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -- \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Матрица A – это матрица коэффициентов при неизвестных; B - матрица-столбец свободных членов системы; X - матрица-столбец неизвестных системы. Так как матрица-столбец – это одновременно и вектор-столбец, то вместо матричных обозначений X и B можно использовать векторные обозначения $\vec{X}$ и $\vec{B}$. Тогда система (3.1) может быть записана в виде одного матричного уравнения

$$AX = B \quad \text{или} \quad A\vec{X} = \vec{B} \tag{3.4}$$

Из этого матричного уравнения при заданной матрице A коэффициентов при неизвестных и заданной матрице-столбце B свободных членов системы должна быть определена матрица-столбец X, содержащая неизвестные этой системы.

Определение. *Любой набор значений неизвестных (x_1; x_2; ...x_n), удовлетворяющих всем уравнениям системы, называется ее решением (частным решением). Система считается решенной, если найдены все ее решения (или доказано, что никаких решений у нее нет).*

В частности, если все свободные члены системы $\{b_1;\ b_2;\ \ldots b_m\}$ равны нулю, то система (3.1) принимает вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ -------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

и называется *линейной однородной* системой (а все прочие системы (3.1) являются *линейными неоднородными*). В матричной форме линейная однородная система имеет вид

$$AX = O \quad \text{или} \quad A\vec{X} = \vec{0} \tag{3.6}$$

Любая линейная однородная система по крайне мере одно решение заведомо имеет. И это решение очевидно: $\{x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ \ldots x_n = 0\}$. Это так называемое нулевое (*тривиальное*) решение. Тривиальное решение у однородной системы (3.5) может оказаться единственным. Но не исключено, что у неё есть и другие (нетривиальные) решения.

Сколько всего решений у различных систем линейных уравнений может быть и как их найти – об этом ниже.

3.2.Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Детальное рассмотрение систем линейных уравнений начнем с наиболее простой из них – с системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. То есть с системы вида:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{3.7}$$

Сколько решений $(x; y)$ у этой системы может в принципе быть, и как их найти? Ответ на этот вопрос можно получить, рассмотрев процесс решения системы.

Решать и анализировать систему (3.7) наиболее удобно самым очевидным и хорошо известным всем школьникам путем – последовательным исключением неизвестных (методом Гаусса). Этот метод состоит в следующем. Выразив из первого уравнения системы (3.7) одну неизвестную через другую (например, y через x) и подставив ее во второе уравнение, после приведения подобных получим линейное уравнение вида $ax = b$ с одной неизвестной x. При этом возможны три варианта:

1) $a \neq 0$. Тогда из уравнения $ax = b$ однозначно находится неизвестная x: $x = \frac{b}{a}$, а затем по этой x из первого уравнения системы однозначно находится и неизвестная y. В итоге получим единственное решение $(x; y)$ системы (3.7).

2) $a = 0$, $b \neq 0$. Тогда уравнение $ax = b$ оказывается противоречивым (не имеет решений). А вместе с ним не имеет решений и система (3.7).

3) $a = 0$, $b = 0$. Тогда уравнение $ax = b$ принимает вид $0 \cdot x = 0$ и удовлетворяется при любых x. При этом для каждого конкретного значения x из первого уравнения системы найдется и соответствующее ему конкретное значение y. В итоге будем иметь бесчисленное множество $(x; y)$ системы (3.7).

Итак, система (3.7) в принципе может:

а) иметь одно решение;

б) не иметь решений;

в) иметь бесчисленное множество решений.

Первый из этих случаев (единственное решение) будет осуществляться как правило. А второй и третий – как исключения.

Действительно, лишь когда в уравнении $ax = b$ величина a окажется равной нулю, будет иметь место либо второй, либо третий случай. Во всех остальных вариантах, когда $a \neq 0$, будет иметь место первый случай.

Полученные выше выводы имеют и ясную геометрическую интерпретацию. Действительно, каждое из двух уравнений системы (3.7) представляет собой уравнение вида $ax + by + c = 0$. То есть каждое из них представляет собой уравнение некоторой прямой на плоскости, где $(x; y)$ - координаты точек этой прямой. Значит, решая систему (3.7), мы определяем координаты $(x;\ y)$ общих точек этих двух прямых, то есть точек их пересечения. Но таких точек у двух прямых, очевидно, может быть:

а) одна (когда прямые пересекаются);

б) ни одной (когда прямые параллельны);

в) бесчисленное множество (когда прямые совпадают).

Соответственно этим случаям система (3.7) будет иметь или одно решение, или ни одного, или бесчисленное множество. При этом для произвольно взятых прямых случай (а) будет, очевидно, осуществляться как правило, а случаи (б) и, особенно, (в) – как исключение.

Пример 1. Найти точки пересечения прямых $x - y = 2$ и $x - 5y + 6 = 0$.

Решение. Для нахождения этих точек составим и решим систему из уравнений указанных прямых.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 5y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x - 5(x-2) = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ -4x = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Как выяснилось, данная система имеет единственное решение ($x = 4\,;\, y = 2$). Значит, указанные выше прямые пересекаются в единственной точке – точке $A(4;2)$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}5x - y = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

и дать полученному результату геометрическую интерпретацию.

Решение.

$$\begin{cases} 1{,}5x - y = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5x - 2 \\ 3x - 2(1{,}5x - 2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5x - 2 \\ 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

– нет решений, ибо последнее уравнение остается неверным независимо от значений неизвестных x и y. Геометрически полученный результат означает, что прямые с уравнениями $1{,}5x - y = 2$ и $3x - 2y = 2$ параллельны.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}5x - y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$$

и дать полученному результату геометрическую интерпретацию.

Решение.

$$\begin{cases} 1{,}5x - y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5x - 1 \\ 3x - 2(1{,}5x - 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5x - 1 \\ 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5x - 1 \\ x - \text{любое} \end{cases} -$$

– бесчисленное множество решений. Действительно, второе уравнение системы, из которого должно было быть определено значение x, привело к правильному числовому равенству 2=2, верному независимо от x (x сократилось и исчезло из уравнения). Следовательно, величина x может быть любой. А другая неизвестная y, если выбрано значение x, найдется по первому уравнению $y = 1{,}5x - 1$. В итоге получаем бесчисленное множество решений системы. Например, таких:

$$1)\ \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases};\ 2)\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0{,}5 \end{cases};\ 3)\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases};\ \dots$$

Все эти решения являются координатами точек пересечения тех двух прямых, уравнения которых входят в исходную систему. В силу бесчисленного количества таких точек указанные прямые совпадают.

Да, но тогда должны совпадать и их уравнения! И это действительно так: умножая на 2 обе части уравнения $1{,}5x - y = 1$ первой прямой, получим равносильное уравнение $3x - 2y = 2$, полностью совпадающее с уравнением второй прямой.

3.3. Квадратные системы линейных уравнений произвольного порядка

Вопрос о решении системы (3.7), являющейся простейшей из систем линейных уравнений, мы исчерпали. Перейдем теперь к общему случаю (3.1), но пока только при условии, что $m = n$, то есть при условии, что количество уравнений системы равно количеству ее неизвестных. Иначе говоря, перейдем к квадратным системам произвольного размера $n\times n$ (n = 3, 4,…), то есть *к системам n-го порядка* вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (3.8)$$

Заметим, что при небольших n (при небольших значениях порядка системы (3.8)) неизвестные системы можно обозначать не (x_1; x_2; …x_n), а, например, (x; y; z;…). Но это, естественно, не принципиально.

Систему (3.8) произвольного порядка n, как и простейшую систему (3.7) второго порядка, наиболее естественно и просто решать методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). А именно, из первого уравнения системы выражаем какую-либо неизвестную, например x_1, через остальные неизвестные (x_2; x_2; …x_n)

$$x_1 = a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n + b'_1$$

и подставляем ее во все остальные уравнения системы (второе, третье, … n-е). В итоге во всех уравнениях системы, начиная со второго, будет уже на одну неизвестную (неизвестную x_1) меньше. Далее, из второго уравнения выражаем следующую неизвестную, например x_2, через оставшиеся неизвестные (x_3; x_4; …x_n)

$$x_2 = a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \ldots + a'_{2n}x_n + b'_2$$

и подставляем ее во все ниже лежащие уравнения (третье, четвертое, … n-е). Ну и так далее до конца. В итоге, если не возникнет сбоев в этой схеме (каких – скажем ниже) мы преобразуем систему (3.8) к следующему равносильному треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 = a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n + b'_1 \\ x_2 = a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \ldots + a'_{2n}x_n + b'_2 \\ ------------------ \\ x_{n-1} = a'_{n-1,n}x_n + b'_{n-1} \\ x_n = b'_n \end{cases} \quad (3.9)$$

Преобразование квадратной системы (3.8) к равносильной ей треугольной системе (3.9) называется *прямым ходом метода Гаусса*.

<u>Примечание</u>. Мы указали лишь идею прямого хода метода Гаусса, целью которого является последовательное исключение неизвестных из уравнений системы. На практике же этой цели можно добиться и несколько иначе, причем значительно проще.

Например, чтобы исключить неизвестную x_1, содержащуюся в первом уравнении системы (3.8), из второго уравнения, можно обе части первого уравнения разделить на a_{11}, затем обе его части умножить на $-a_{21}$, и после этого первое уравнение сложить со вторым. В итоге неизвестная x_1 во втором уравнении исчезнет (исключится). Аналогично с помощью первого уравнения можно исключить неизвестную x_1 и из остальных уравнений системы (третьего, четвертого, …, последнего). Далее, по аналогичной схеме, с помощью второго уравнения можно исключить из всех нижележащих уравнений неизвестную x_2. И так далее до конца. В итоге мы опять придем к треугольной системе типа (3.9), но только существенно быстрее.

Кстати, неизвестную, исключаемую из других уравнений системы, часто называют *опорной неизвестной*, а уравнение, содержащее эту опорную неизвестную и с помощью которого исключается эта опорная неизвестная из других уравнений системы, называется *опорным уравнением*. При осуществлении прямого хода метода Гаусса и опорное уравнение, и опорную неизвестную удобно, для наглядности, подчеркивать.

И еще одно существенное замечание: для облегчения работы в качестве опорной неизвестной, выбираемой на каждом этапе прямого хода метода Гаусса, удобно выбирать ту, перед которой нет числового коэффициента – только знак (+) или (–) (если, конечно, такая неизвестная есть). В этом случае треугольная система типа (3.9) будет иметь другой порядок расположения неизвестных, что, конечно, не принципиально.

А вообще-то лучше всего в качестве опорной неизвестной выбирать ту, коэффициент при которой максимален по модулю - в этом случае погрешности от округлений при текущих вычислениях будут меньше влиять на итоговые погрешности в найденных значениях неизвестных. Особенно важным является это замечание, если коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы получены опытным путем и, следовательно, имеют свои погрешности.

Пойдем далее. Будем считать, что мы (в той или иной форме) реализовали прямой ход метода Гаусса, сбоев в этой работе не было (осуществился так называемый *стандартный вариант*), и нам удалось привести исходную систему (3.8) к равносильной системе типа (3.9) (или такой же, как (3.9), системе, только с другим порядком расположения неизвестных). После этого система (3.9) решается уже просто с помощью *обратного хода метода Гаусса.*

Суть его в следующем. Последнее уравнение $x_n = b'_n$ сразу дает значение неизвестной x_n. Далее, из предпоследнего уравнения, используя найденное значение x_n, вычисляем значение x_{n-1}. Потом из третьего снизу уравнения, используя найденные x_n и x_{n-1}, находим

x_{n-2}. Двигаясь таким образом снизу вверх и дойдя до первого уравнения, последовательно определим все неизвестные системы (3.9), а значит, и неизвестные равносильной ей системы (3.8). Набор найденных значений всех неизвестных оказывается единственным, а, значит, единственным окажется и полученное в итоге решение $\{x_1;\ x_2;\ \dots x_n\}$ системы (3.8).

Все это будет в стандартном варианте. Но возможны и два варианта нестандартных, когда появляются сбои в изложенной выше схеме.

Нестандартный вариант 1. На каком-то этапе осуществления прямого хода метода Гаусса в каком-то из уравнений системы (или даже в нескольких уравнениях) могут исчезнуть (сократиться) все неизвестные, кроме свободных от неизвестных чисел, которые образуют неверное равенство типа $0=1,\ 2=5$ и т.д. Так как в этом уравнении нет неизвестных, то и невозможно сделать его верным за счет какого-то подбора неизвестных. Система, содержащая хотя бы одно такое уравнение, не имеет решений. А значит, не будет иметь решений и исходная система (3.8).

Нестандартный вариант 2. Этот вариант, в отличие от первого нестандартного варианта, будет иметь место, если на каком-то этапе прямого хода метода Гаусса в каком-то из уравнений системы все его члены сократятся, и останется верное числовое равенство $0=0$. Это, кстати, может случиться и с несколькими уравнениями системы. Отбросив их, мы получим систему, в которой количество уравнений меньше количества неизвестных (получим так называемую *недоопределенную систему*). Кстати, если в системе окажется два или более одинаковых уравнения, то отбросив из дублирующих друг друга уравнений все, кроме одного, мы также получим недоопределенную систему.

Завершив прямой ход метода Гаусса в недоопределенной системе, в последнем уравнении системы мы будем иметь не одну неизвестную (как это получается в стандартном варианте (3.9)), а две или более. Это последнее уравнение имеет бесчисленное множество решений, ибо в нем все неизвестные, кроме одной, можно задать произвольно (это – так называемые *свободные неизвестные*), а оставшаяся неизвестная (*связанная*) уже однозначно выражается через свободные неизвестные. После этого в процессе обратного хода метода Гаусса через свободные неизвестные однозначно выражаются и остальные неизвестные системы (остальные связанные неизвестные). В итоге мы получим бесчисленное множество решений исходной системы.

Подведем итог. Квадратные системы линейных уравнений вида (3.8) при любом их порядке n ($n = 2,3,\dots$) могут в принципе:

1) иметь единственное решение (стандартный вариант);
2) не иметь решений (нестандартный вариант 1);

3) иметь бесчисленное множество решений (нестандартный вариант 2).

Стандартный вариант на практике встречается как правило, нестандартные – как исключения.

<u>Пример 4</u>. Решить квадратную систему 3-го порядка

$$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Применим метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса) по схеме, указанной в примечании выше. Опорное уравнение и опорную неизвестную на каждом шаге прямого хода этого метода будем подчеркивать.

а) Прямой ход:

$$\begin{cases} \underline{2x-3y+\underline{z}=2} \quad (4) \quad (3) \\ x+5y-4z=-5 \\ 4x+y-3z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 9x-7y=3 \\ 10x-8y=2 \quad (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ \underline{-x+\underline{y}=1} \quad (8) \\ 10x-8y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ -x+y=1 \\ 2x=10 \end{cases}$$

б) Обратный ход:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ -x+y=1 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ y=1+x=1+5=6 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2+3y-2x \\ y=6 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \\ z=10 \end{cases}$$

Итак, у данной системы оказалось единственное решение ($x=5$; $y=6$; $z=10$). Если подставить эти значения неизвестных в уравнения исходной системы, то можно убедиться в том, что все уравнения превращаются в верные числовые равенства. То есть решение системы найдено верно.

<u>Пример 5</u>. Решить систему

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+4y+6z=3 \\ 3x+y-z=1 \end{cases}$$

<u>Решение</u>.

а) Прямой ход метода Гаусса:

$$\begin{cases} \underline{\underline{x}+2y+3z=4} \quad (-2) \quad (-3) \\ 2x+4y+6z=3 \\ 3x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 0=5 \\ -5y-10z=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

По второму уравнению получившейся системы ясно, что система не имеет решений. Это и отмечено значком $\varnothing$ («нет решений»).

<u>*Пример 6*</u>. Решить систему

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

<u>*Решение*</u>. Данная система 3-го порядка однородная, так как столбец ее свободных членов состоит из одних нулей. Значит, по крайней мере, одно решение она заведомо имеет – это тривиальное решение ($x = 0$; $y = 0$; $z = 0$). Поищем возможные другие ее решения (мы говорим осторожно – поищем, а не найдем, ибо их может и не быть). Применим метод Гаусса.

а) Прямой ход:

$$\begin{cases} 2x - \underline{y} + 3z = 0 \quad (2) \quad (1) \\ x + 2y - 5z = 0 \quad + \quad + \\ 3x + y - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 5x + z = 0 \\ 5x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 5x + z = 0 \end{cases}.$$

б) Обратный ход:

$$\begin{cases} z = -5x \\ y = 2x + 3z = -13x \\ x - \text{любое число} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \text{свободная неизвестная} \\ y = -13x \\ z = -5x \end{cases}$$

Таким образом, у системы оказалось бесчисленное множество решений. В их число при значении $x = 0$ свободной неизвестной x входит и тривиальное решение ($x = 0$; $y = 0$; $z = 0$).

Кстати, найденные решения можно представить и в более удобной симметричной форме, если ввести обозначение $x = C$ (C – произвольная константа). Тогда получим окончательно

$$\begin{cases} x = C \\ y = -13C \\ z = -5C \end{cases} \quad (C \text{ – произвольная константа})$$

Вопрос о квадратных системах линейных уравнений мы исчерпали. Перейдем теперь к общему случаю (3.1), когда в системе любое число m уравнений и любое число n неизвестных, причем $m \neq n$. То есть перейдем к так называемым *прямоугольным системам*. Естественно, следует рассмотреть и случай $m > n$, и случай $m < n$.

3.4. Переопределенные системы

Таковыми называются системы (3.1) в случае, когда $m > n$ (когда количество уравнений больше количества неизвестных). Переопределенные системы, как правило, не имеют решений. Но, как исключение, они могут иметь единственное решение и даже бесчисленное множество решений.

Проиллюстрируем это на примере трех уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{cases} \tag{3.10}$$

Если в этой системе проигнорировать (отбросить) какое-то (любое) из этих уравнений, то останется квадратная система вида (3.7) из двух уравнений с двумя неизвестными. Такая система, как мы знаем, как правило, имеет единственное решение (x; y). Но третье уравнение при этих (x; y) вряд ли удовлетворится, если только оно не является следствием двух других уравнений. То есть если оно не специально подобрано. А значит, как правило, переопределенная система (3.10) из трех уравнений не будет иметь решений. Но если все же отброшенное уравнение системы (3.10) является следствием двух оставшихся, то тогда каждое решение системы из этих двух оставшихся уравнений будет и решением всей переопределенной системы (3.10). То есть у нее может быть и одно решение, и даже бесчисленное множество решений.

Все сказанное выше о системе (3.10) становится предельно ясным, если мы учтем, что каждое из уравнений этой системы – это уравнение прямой на плоскости. А значит, решая систему (3.10), мы ищем координаты (x; y) общих точек трех прямых на плоскости. То есть ищем координаты точек, в которых пересекаются сразу три прямые. Но таких точек у трех произвольных прямых, скорее всего, не будет. А значит, скорее всего, система (3.10) не будет иметь решений.

Однако все-таки возможен случай, когда все три заданные прямые пресекаются в одной точке. Тогда система (3.10) будет иметь единственное решение (x; y), определяющее координаты этой точки.

Более того, все три прямые могут и совпадать! Тогда у них бесчисленное количество общих точек, а значит, в этом случае система (3.10) будет иметь бесчисленное множество решений. Этими решениями будут координаты (x; y) точек всех трех совпадающих прямых.

Пример 7. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x+2y=4 \\ x-5y=5 \end{cases}$$

Решение. Данная система является переопределенной (в ней три уравнения и лишь две неизвестные). Поэтому следует ожидать, что она, скорее всего, не будет иметь решений. Так ли это, выясним с помощью метода Гаусса:

$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x+2y=4 \\ x-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x+2y=4}} \quad (-2) \quad (-1) \\ 2x-3y=6 \\ x-5y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ -7y=-2 \\ -7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

Система действительно не имеет решений, так как два последних ее уравнения противоречат друг другу.

3.5. Недоопределенные системы

Таковыми называются системы (3.1) в случае, когда $m < n$ (когда количество уравнений меньше количества неизвестных). Недоопределенные системы, как правило, имеют бесчисленное количество решений. Но, как исключение, они могут не иметь решений. Вариант единственного решения для таких систем исключается.

Проиллюстрируем сказанное на примере двух уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases} \tag{3.11}$$

Применяя к ней метод Гаусса, можем с помощью первого уравнения исключить какую-либо неизвестную из второго уравнения системы. Но все равно, вообще говоря, во втором уравнении останутся две неизвестные. Одну из них можно объявить свободной (она может принимать любые значения), тогда другая (связанная) неизвестная однозначно выразится через свободную. А затем из первого уравнения системы (3.8) однозначно выразится через свободную неизвестную и оставшаяся третья неизвестная (тоже связанная). В итоге получим бесчисленное количество решений недоопределенной системы (3.11).

Впрочем, может случиться и так, что после исключения какой-то неизвестной из второго уравнения системы в нем останется не две, а одна неизвестная. Тогда эта неизвестная найдется однозначно. Но после подстановки этой неизвестной в первое уравнение системы в этом первом уравнении окажется две неизвестных, одну из которых (любую) можно считать свободной. В итоге, очевидно, опять получим бесчисленное множество решений.

Наконец, во втором уравнении системы (3.11) после исключения из него какой-то неизвестной могут заодно исключиться и две другие неизвестные, так что оно примет вид числового равенства: верного типа $2 = 2$ или неверного типа $5 = 2$. Второй из этих двух случаев будет, очевидно, означать, что система (3.11) не имеет решений. А первый – что все три неизвестные этой системы должны быть найдены из одного ее первого уравнения, ибо ее второе уравнение – прямое следствие первого. В этом первом уравнении две неизвестные из трех оказываются свободными, одна связанная, а система (3.11) в этом случае, естественно, имеет бесчисленное множество решений.

Ситуацию с решениями недоопределенной системы (3.11) и с их количеством можно очень наглядно проиллюстрировать геометрически. Как известно еще из школьного курса математики, уравнение вида $ax + by + cz + d = 0$ является *уравнением плоскости в пространстве*. В нем (x; y; z) – это координаты точек этой плоскости. Поэтому, решая систему (3.11), мы ищем координаты (x; y; z) общих точек (точек пересечения) двух плоскостей в пространстве. Но таких точек (а значит, и решений системы (3.11)) может, в принципе, быть:

а) бесчисленное множество (плоскости пересекаются или совпадают);

б) не быть вообще (плоскости параллельны).

Вариант (а) имеет место как правило, вариант (б) – как исключение.

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Решение. Данная система является недоопределенной (в ней три неизвестные и лишь два уравнения). Поэтому следует ожидать, что она, скорее всего, будет иметь бесчисленное количество решений. Одно из них, в силу однородности системы, уже очевидно – это тривиальное решение ($x = 0$; $y = 0$; $z = 0$). Найдем остальные решения (они обязательно будут):

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=0 & (-1) \\ 5x+2y+3z=0 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \textit{свободная неизвестная} \\ z=-2x \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$$

Получили, как и ожидали, бесчисленное количество решений. Их можно представить и в более удобной симметричной форме, если ввести обозначение $\frac{1}{2}x=C$ (C –произвольная константа). Тогда получим окончательно

$$\begin{cases} x=2C \\ y=C \\ z=-4C \end{cases} \quad (C - \text{произвольная константа})$$

В этом множестве решений, заметим, содержится и тривиальное решение – оно получается при $C=0$.

3.6. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальные решения

Рассмотрим подробнее однородные системы (3.5). Причем ограничимся рассмотрением случая $m<n$, то есть рассмотрением недоопределенных однородных систем линейных уравнений. Такое ограничение связано с тем, что квадратные и переопределенные однородные системы имеют, как правило, лишь одно тривиальное решение $\{x_1= 0;\ x_2= 0;\ \dots x_n= 0\}$. А недоопределенные однородные системы заведомо имеют бесчисленное количество решений. И мы хотели бы получить схему нахождения этих решений, которую можно было бы запрограммировать для ЭВМ. Такая схема может быть использована и для квадратных и для переопределенных систем в тех исключительных случаях, когда они тоже имеют бесчисленное количество решений. Ведь в этих случаях применение метода Гаусса приводит и их к недоопределенным системам.

Итак, пусть система (3.5) – недоопределенная однородная система линейных уравнений ($m<n$). Последовательно исключая ее неизвестные методом Гаусса, получим равносильную ей систему следующего трапециевидного вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
0 \quad + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
0 \quad + \quad 0 \quad + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3r}x_r + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \ldots + a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = 0
\end{cases} \tag{3.12}
$$

Здесь приведены лишь те r уравнений из исходных m уравнений системы (3.5), которые не превратились в тождества вида 0=0 (такие тождества следует отбросить; если таковых не окажется, то $r=m$). Коэффициенты при неизвестных в системе (3.12), естественно, будут не те, что в системе (3.5), как и, возможно, нумерация самих неизвестных. Но мы, для удобства, оставим все обозначения неизменными. Ведь важно главное: любую систему (3.5) с m уравнениями и n неизвестными в процессе прямого хода метода Гаусса можно привести к равносильной ей трапециевидной системе (3.12) с $r \le m$ уравнениями.

Во всех этих уравнениях перебросим в правую часть слагаемые с неизвестными $\{x_{r+1},\ x_{r+2}, \ldots\ x_n\}$. Тогда получим:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - a_{1,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n \\
0 \quad + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - a_{2,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{2n}x_n \\
0 \quad + \quad 0 \quad + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3r}x_r = -a_{3,r+1}x_{r+1} - a_{3,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{3n}x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - a_{r,r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{rn}x_n
\end{cases} \tag{3.13}
$$

Через эти неизвестные $\{x_{r+1},\ x_{r+2}, \ldots\ x_n\}$ однозначно выражаются оставшиеся в левых частях остальные (связанные с ними) неизвестные $\{x_1,\ x_2, \ldots\ x_r\}$. Действительно, сначала из последнего уравнения однозначно выражается x_r, затем из предпоследнего x_{r-1}, и т.д., пока, наконец, не будет найдена (выражена через неизвестные $\{x_{r+1},\ x_{r+2}, \ldots\ x_n\}$) неизвестная x_1. А неизвестные $\{x_{r+1},\ x_{r+2}, \ldots\ x_n\}$ остаются свободными и могут принимать любые значения.

Итак, из системы (3.13) получаем:

$$
\begin{cases}
x_1 = \beta_{11}x_{r+1} + \beta_{12}x_{r+2} + \ldots + \beta_{1,n-r}x_n \\
x_2 = \beta_{21}x_{r+1} + .\beta_{22}x_{r+2} + \ldots + \beta_{2,n-r}x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_r = \beta_{r1}x_{r+1} + \beta_{r2}x_{r+2} + \ldots + \beta_{r,n-r}x_n \\
x_{r+1} = C_1 - \text{произвольная константа} \\
x_{r+2} = C_2 - \text{произвольная константа} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = C_{n-r} - \text{произвольная константа}
\end{cases} \tag{3.14}
$$

Это решение является *общим решением* этой системы, ибо оно содержит в себе все ее частные решения. В число этих частных решений входит и тривиальное решение $\{x_1 = 0,\ x_2 = 0, ...\ x_n = 0\}$. Оно получается, если в (3.14) положить $\{C_1 = 0;\ C_2 = 0; ....\ C_{n-r} = 0\}$.

Отметим, что любая однородная система линейных уравнений (3.5) в матричной форме имеет вид одного однородного матричного уравнения (3.6): $A\vec{X} = \vec{0}$. И каждое частное решение $\vec{X}$ этого уравнения, согласно (3.3), представляет собой n - компонентный вектор-столбец $\vec{X} = (x_1; x_2; \ldots x_n)$ (из типографских соображений мы записали его в виде вектора-строки), компонентами которого являются частные решения $(x_1; x_2; \ldots x_n)$ этой системы.

У этих векторов-столбцов $\vec{X}$ имеют место следующие *два важных свойства*:

1. Если все компоненты любого такого вектора-столбца умножить на произвольное число λ, то получим новый вектор-столбец $\lambda\vec{X}$, который тоже является решением матричного уравнения $A\vec{X} = \vec{0}$.

Действительно, согласно последнему из свойств матриц (2.17) имеем:

$$A(\lambda\vec{X}) = \lambda(A\vec{X}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

2. Сумма любых двух частных решений $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ матричного уравнения $A\vec{X} = \vec{0}$ тоже является решением этого уравнения.

Действительно, согласно предпоследнему из свойств матриц (2.17) имеем:

$$A(\vec{X}_1 + \vec{X}_2) = A\vec{X}_1 + A\vec{X}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Выполнение этих двух свойств означает, что частные решения $\vec{X} = (x_1; x_2; \ldots x_n)$ любого однородного матричного уравнения $A\vec{X} = \vec{0}$ (а, значит, и любой однородной системы линейных уравнений, в том числе системы (3.12)) образуют *векторное пространство* решений этого уравнения (о векторных пространствах см. §1, пункт 1.5). А, стало быть, есть смысл поставить вопрос о базисе (базисных векторах) этого пространства.

Пусть $\vec{X} = (x_1; x_2; \ldots x_n)$ - множество всех тех векторов-столбцов, компоненты которых являются частными решениями системы (3.12). Эти компоненты определяются по формулам (3.14). Выделим из указанного множества векторов $\vec{X}$ $n-k$ векторов-столбцов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\ \vec{e}_{n-r}\}$ - столько, сколько свободных неизвестных у системы (3.12) – следующим образом.

Для первого из них положим в (3.14) $C_1=1$, а остальные константы $C_2, C_3, \dots C_{n-r}$ положим равными нулю. Для второго положим в (3.14) $C_2=1$, а остальные константы положим равными нулю. Для третьего $C_3=1$, а остальные – нулю. И т.д. Тогда получим следующие векторы-столбцы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_{n-r}\}$, компоненты которых являются частными решениями $(x_1; x_2; \dots x_r; \dots x_n)$ системы уравнений (3.12):

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \\ \dots \\ \beta_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \beta_{12} \\ \beta_{22} \\ \dots \\ \beta_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \beta_{13} \\ \beta_{23} \\ \dots \\ \beta_{r3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \dots\dots \quad \vec{e}_{n-r} = \begin{pmatrix} \beta_{1,n-r} \\ \beta_{2,n-r} \\ \dots \\ \beta_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.15)$$

Эти частные решения называются *фундаментальными решениями* системы (3.12). Называются они так потому, что через них по формуле

$$\vec{X} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + \dots + C_{n-r}\vec{e}_{n-r} \qquad (3.16)$$

выражаются все частные решения (3.14) системы (3.12), а, значит, и исходной системы (3.5).

Покажем, что векторы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_{n-r}\}$ линейно независимы. То есть покажем, что векторное равенство

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_{n-r}\vec{e}_{n-r} = \vec{0} \qquad (3.17)$$

выполняется лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$. Расписывая, с учетом выражений (3.15), это равенство покомпонентно, получим:

$$
\begin{cases}
\beta_{11}\lambda_1 + \beta_{12}\lambda_2 + ... + \beta_{1,n-r}\lambda_{n-r} = 0 \\
\beta_{21}\lambda_1 + \beta_{22}\lambda_2 + ... + \beta_{2,n-r}\lambda_{n-r} = 0 \\
.... \\
\beta_{r1}\lambda_1 + \beta_{r2}\lambda_2 + ... + \beta_{r,n-r}\lambda_{n-r} = 0 \\
\lambda_1 \cdot 1 = 0 \\
\lambda_2 \cdot 1 = 0 \\
.... \\
\lambda_{n-r} \cdot 1 = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\lambda_1 = 0 \\
\lambda_2 = 0 \\
.... \\
\lambda_{n-r} = 0
\end{cases}
\qquad (3.18)
$$

Таким образом, векторы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ... \vec{e}_{n-r}\}$ действительно линейно независимы. А так как через них по формуле (3.16) линейно выражаются все частные решения (3.14) системы (3.12), а, значит, и исходной системы (3.5), то фундаментальные решения $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ... \vec{e}_{n-r}\}$ образуют *базис* векторного пространства всех этих решений.

Пример 9. Найти фундаментальные решения однородной системы

$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\
x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\
x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0
\end{cases}
$$

и записать ее общее решение.

Решение. Применим к этой системе метод Гаусса. С помощью первого уравнения исключим неизвестную x_5 из остальных уравнений системы:

$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
-4x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 11x_4 = 0 \\
16x_1 + 16x_2 - 52x_3 + 44x_4 = 0 \\
-8x_1 - 8x_2 + 26x_3 - 22x_4 = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
-4x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 11x_4 = 0 \\
-4x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 11x_4 = 0 \\
-4x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 11x_4 = 0
\end{cases}
$$

Отбросим третье и четвертое уравнения, совпадающие со вторым, а в оставшихся двух уравнениях оставим слева лишь две неизвестные: x_5 и еще какую-нибудь, например x_4:

$$
\begin{cases}
3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
-4x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 11x_4 = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x_5 + 2x_4 = -3x_1 - x_2 + 8x_3 \\
0 \ -11x_4 = 4x_1 + 4x_2 - 13x_3
\end{cases}
$$

Система приняла трапециевидную форму. В ней неизвестные (x_1, x_2, x_3) - свободные, а x_4 и x_5 - связанные (выражаемые через свободные). Выражая связанные неизвестные через свободные, получим следующее общее решение системы, содержащее все ее частные решения:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 - \text{произвольная константа} \\ x_2 = C_2 - \text{произвольная константа} \\ x_3 = C_3 - \text{произвольная константа} \\ x_4 = -\dfrac{4}{11}C_1 - \dfrac{4}{11}C_2 + \dfrac{13}{11}C_3 \\ x_5 = -\dfrac{25}{11}C_1 - \dfrac{3}{11}C_2 + \dfrac{62}{11}C_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 11C_1^* - \text{произвольная константа} \\ x_2 = 11C_2^* - \text{произвольная константа} \\ x_3 = 11C_3^* - \text{произвольная константа} \\ x_4 = -4C_1^* - 4C_2^* + 13C_3^* \\ x_5 = -25C_1^* - 3C_2^* + 62C_3^* \end{cases}$$

(в последних равенствах вместо произвольных констант C_i введены произвольные константы $C_i^* = 11C_i$).

Мы получили множество всех частных решений заданной системы уравнений, то есть получили ее общее решение. Выделим из него фундаментальные решения $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ – их должно быть три, по числу свободных неизвестных.

1) Полагая $\{C_1^* = 1; C_2^* = 0; C_3^* = 0\}$, получим первое из них – пятикомпонентный вектор-столбец $\vec{e}_1$.

2) Полагая $\{C_1^* = 0; C_2^* = 1; C_3^* = 0\}$, получим $\vec{e}_2$.

3) Полагая $\{C_1^* = 0; C_2^* = 0; C_3^* = 1\}$, получим $\vec{e}_3$.

Итак,

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -25 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 13 \\ 62 \end{pmatrix}.$$

- фундаментальные решения нашей системы. А $\vec{X} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + C_3\vec{e}_3$ - ее общее решение, где (C_1, C_2, C_3) - произвольные постоянные. То есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ -25 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 11 \\ 13 \\ 62 \end{pmatrix}$$

Кстати, исключая в методе Гаусса другие неизвестные, получим другой набор и свободных, и связанных неизвестных. А значит и другие фундаментальные (базисные) решения. Но это вполне естественно: базис в векторных пространствах можно выбирать по-разному.

3.7. Неоднородные системы и их связь с однородными

Наконец, рассмотрим схему решения неоднородных систем линейных уравнений (3.1) в том случае, когда они имеют бесчисленное количество решений. В первую очередь это относится к недоопределенным системам ($m \prec n$), для которых бесчисленное количество решений имеет место как правило. Бесчисленное количество решений могут иметь и квадратные и даже переопределенные системы, но это бывает как исключение. Такое случается с этими системами тогда, когда в процессе применения метода Гаусса часть их уравнений обращается в тождества типа 0=0, уравнения эти отсеиваются, а оставшиеся уравнения составляют уже недоопределенную систему.

Как оказывается, имеет место связь между решениями неоднородной системы (3.1) и решениями соответствующей ей однородной системы (3.5) (с теми же коэффициентами). Эта связь устанавливается <u>*теоремой*</u>:

Общее решение $\vec{X}$ неоднородной системы (3.1) (или, что одно и то же, матричного уравнения (3.4)) равно сумме какого-либо ее частного решения $\vec{X}_*$ и общего решения $\vec{X}_0$ однородной системы (3.5) (матричного уравнения (3.6).

То есть

$$\vec{X} = \vec{X}_* + \vec{X}_0 = \vec{X}_* + C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + ... + C_{n-r}\vec{e}_{n-r}, \tag{3.19}$$

где $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ... \vec{e}_{n-r}\}$ - фундаментальные решения однородной системы, а $\{C_1, C_2, ... C_{n-r}\}$ - произвольные постоянные.

<u>*Доказательство*</u>. Пусть $\vec{X}_1^*$ и $\vec{X}_2^*$- любые два частных решения неоднородного матричного уравнения (3.4) (неоднородной системы (3.1)). Это значит, что $A\vec{X}_1^* = \vec{B}$ и $A\vec{X}_2^* = \vec{B}$. Пусть $\vec{X}_0 = \vec{X}_2^* - \vec{X}_1^*$. Тогда

$$A\vec{X}_0 = A(\vec{X}_2^* - \vec{X}_1^*) = A\vec{X}_2^* - A\vec{X}_1^* = \vec{B} - \vec{B} = \vec{0}.$$

То есть вектор–столбец $\vec{X}_0 = \vec{X}_1^* - \vec{X}_2^*$ является решением однородного матричного уравнения (3.6) (однородной системы (3.5)). При этом $\vec{X}_2^* = \vec{X}_1^* + \vec{X}_0$. А так как $\vec{X}_1^*$ и $\vec{X}_2^*$ - любые два частных решения неоднородной системы, то это значит, что найдя какое-либо одно частное решение неоднородной системы $\vec{X}_1^*$ и прибавляя к нему всевозможные частные решения $\vec{X}_0$ однородной системы, мы получим в итоге всевозможные частные решение $\vec{X}_2^*$ неоднородной системы. Учитывая, что однородная система (3.5) с помощью метода Гаусса может быть приведена к равносильной однородной системе (3.12), общее решение $\vec{X}_0$ которой имеет вид (3.16), получим доказываемую формулу (3.19).

Примечание 1. При практическом решении неоднородной системы, как и при решении системы однородной, сначала ее с помощью метода Гаусса приводят к трапециевидной форме типа (3.12). Только в правых частях этой системы не все числа окажутся равными нулю. Дальше ее преобразовывают в систему типа (3.13) так, чтобы свободные неизвестные оказались справа. Положив их все равными нулю и найдя соответствующие им связанные неизвестные, получим некоторое частное решение $\vec{X}_*$, которое и можно использовать в формуле (3.19). Кстати, найденное таким путем частное решение $\vec{X}_*$ неоднородной системы называется ее *базовым решением*.

Примечание 2. Формула (3.19) имеет практический смысл лишь тогда, когда неоднородная система имеет бесчисленное количество решений. А это, как правило, бывает тогда, когда система недоопределенная - количество ее уравнений меньше количества неизвестных. Тогда при приведении ее к трапециевидной форме неизбежно часть ее неизвестных оказывается свободными, за счет изменения которых у системы и образуется бесчисленное количество решений. Если свободных неизвестных у системы нет, то она или имеет единственное решение (это обычная ситуация для квадратных систем), или вообще не имеет решений (это, как правило, имеет место для переопределенных систем).

Впрочем, и в двух последних случаях формула (3.19) верна. Просто она становится тривиальной (малосодержательной). В первом из этих случаев, когда неоднородная система имеет единственное решение $\vec{X}_*$ соответствующая ей однородная система тоже имеет единственное решение, и это решение - нулевое (тривиальное): $\vec{X}_0 = \vec{0}$. И тогда формула (3.19) принимает вид $\vec{X} = \vec{X}_*$. То есть она утверждает, что множество $\vec{X}$ всех частных решений неоднородной системы состоит лишь из одного ее частного решения. А если неоднородная система не имеет решений, то $\vec{X}_*$ не существует, а вместе с ним, согласно (3.19), не существует (оказывается пустым) и множество всех частных решений $\vec{X}$ неоднородной системы.

Пример 10. Найти общее решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 20 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

<u>Решение</u>. Данная система – квадратная. Такие системы, как правило, имеют единственное решение. Но все-таки возможны исключения: система может не иметь решений или иметь их бесчисленное количество. Чтобы выяснить, какой случай имеет место в данном случае, решим эту систему методом Гаусса.

С помощью первого уравнения исключим неизвестную x_1 из всех других уравнений. В итоге получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 0 \ + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ 0 \ + 6x_2 + 3x_3 + 12x_4 = 12 \\ 0 \ - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}$$

Теперь с помощью второго уравнения получившейся системы исключим из нижележащих (третьего и четвертого) уравнений неизвестную x_2:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 0 \ + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \\ 0 \ = 0 \\ 0 \ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 0 \ + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 4 - x_3 + x_4 \\ 0 + \ 2x_2 = 4 - x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

.

Как видим, наша квадратная система преобразовалась в равносильную ей недоопределенную трапециевидную систему, у которой неизвестные x_3 и x_4 - свободные. Это означает, вопреки нашему ожиданию, что наша система имеет бесчисленное количество решений. Найдем эти решения.

1. Сначала найдем базовое решение $\vec{X}_*$ этой системы, положив в ней обе свободные неизвестные равными нулю. Тогда получим: $\vec{X}_* = (6; 2; 0; 0)$.

2. Теперь рассмотрим соответствующую исходной однородную систему, для чего обнулим (заменим на нули) правые части (свободные члены) всех ее уравнений. Применив затем к ней метод Гаусса, получим следующую однородную недоопределенную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \\ 0 + 2x_2 = -x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

Выражая связанные неизвестные x_1 и x_2 через свободные, получим общее решение этой системы:

$$\begin{cases} x_3 - \text{свободная неизвестная} \\ x_4 - \text{свободная неизвестная} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}x_3 - 2x_4 \\ x_1 = -\dfrac{3}{2}x_3 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = C_1 - \text{произвольная константа} \\ x_4 = C_2 - \text{произвольная константа} \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}C_1 - 2C_2 \\ x_1 = -\dfrac{3}{2}C_1 - C_2 \end{cases}$$

Найдем ее фундаментальные решения $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$:

а) Полагая $\{C_1 = 1; C_2 = 0\}$, получим: $\vec{e}_1 = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 1; 0\right)$.

б) Полагая $\{C_1 = 0; C_2 = 1\}$, получим $\vec{e}_2 = (-1; -2; 0; 1)$.

А теперь, используя формулу (3.19), можем записать вектор-столбец $\vec{X} = \vec{X}_* + C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2$ общего решения исходной неоднородной системы:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В заключение этого параграфа подведем *общий итог* анализа систем линейных уравнений, ибо все варианты, которые могут встретиться при решении этих систем, мы рассмотрели.

Общий итог

Любая система линейных уравнений (3.1) (с любым количеством уравнений и любым количеством неизвестных) может, в принципе:

а) иметь единственное решение;

б) не иметь решений;

в) иметь бесчисленное множество решений.

При этом квадратные системы (у которых количество уравнений равно количеству неизвестных) имеют, *как правило*, одно решение.

Системы, у которых количество уравнений больше количества неизвестных (переопределенные системы), *как правило*, не имеют решений.

Системы, у которых количество уравнений меньше количества неизвестных (недоопределенные системы), *как правило*, имеют бесчисленное множество решений.

Окончательно вопрос о количестве решений и о самих решениях каждой конкретной системы может быть выяснен в процессе решения системы. При этом наиболее естественным, универсальным, экономным методом решения систем линейных (да и не только линейных!) уравнений является метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).

Отметим, однако, что изложенный в этом параграфе метод Гаусса определяет лишь *схему* (процесс) решения систем линейных уравнений, но фактически не указывает каких-то готовых формул для искомых неизвестных системы. А такие формулы в некоторых случаях иметь желательно – чтобы подставить их в какие-то другие формулы, проанализировать их, и т.д. В связи с этим был разработан ряд других, отличных от метода Гаусса, методов решения систем линейных уравнений, приводящих к такого рода формулам.

Один из них – метод определителей. Его мы рассмотрим в следующем параграфе. А затем рассмотрим еще один метод – матричный.

Но прежде, чем перейти к следующему параграфу, выполним обещанное в пункте 1.4, §1. А именно, докажем, что любая система n-мерных векторов, содержащая $k \succ n$ векторов, является линейно зависимой системой.

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= (a_{11}; a_{12}; \dots a_{1n}) \\ \vec{a}_2 &= (a_{21}; a_{22}; \dots a_{2n}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{a}_k &= (a_{k1}; a_{k2}; \dots a_{kn}) \end{aligned} \tag{3.20}$$

- совокупность произвольных k n- мерных векторов, где $k \succ n$. Составим векторное равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}, \tag{3.21}$$

где $\vec{0} = (0; 0; \dots 0)$ - нулевой n - мерный вектор, и выясним, при каких коэффициентах $\{\lambda_1; \lambda_2; \dots \lambda_k\}$ это равенство возможно. Расписывая его покомпонентно (для каждой компоненты в отдельности), получим систему n линейных уравнений с k неизвестными $\{\lambda_1; \lambda_2; \dots \lambda_k\}$:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + ... + a_{k1}\lambda_k = 0 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + ... + a_{k2}\lambda_k = 0 \\ .... \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + ... + a_{kn}\lambda_k = 0 \end{cases} \qquad (3.22)$$

Это – однородная и недоопределенная система, так как $n \prec k$. Поэтому она имеет бесчисленное количество решений $\{\lambda_1; \lambda_2; .... \lambda_k\}$. Одно из них – тривиальное: $\{\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 0; .... \lambda_k = 0\}$. Но заведомо есть и множество нетривиальных решений. То есть векторное равенство (3.21) может выполняться при коэффициентах $\{\lambda_1; \lambda_2; .... \lambda_k\}$, не всех равных нулю. А это и доказывает, что система векторов (3.20) является линейно зависимой.

Упражнения

1. Решить систему $\begin{cases} ax - 3y = 1 \\ ax - 2y = 2 \end{cases}$,

где a – некоторый числовой параметр. Указать, при каких значениях a система: а) имеет единственное решение; б) не имеет решений; в) имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: а) При $a \neq 0$ система имеет единственное решение ($x = \frac{4}{a}; y = 1$); б) при $a = 0$ система не имеет решений; в) бесчисленного количества решений система ни при каких значениях a иметь не может.

2. При каких значениях параметра α система $\begin{cases} x + \alpha y = 1 \\ \alpha x + y = \alpha^2 \end{cases}$

а) Имеет единственное решение; *б*) Не имеет решений; *в*) Имеет бесчисленное множество решений.

Ответ: *а*) $\alpha \neq \pm 1$; *б*) $\alpha = -1$; *в*) $\alpha = 1$.

3. Методом Гаусса решить системы:

а) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - 5z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$; *б*) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{cases}$; *б*) $\begin{cases} -2x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ -5x + 10y - 7z = 3 \end{cases}$.

Ответ: *а*) ($x = 0$; $y = 0$; $z = 0$); *б*) $(x = 1;\ y = 3;\ z = 5)$; *в*) Нет решений.

4. Показать, что переопределенная система

$$\begin{cases} 2x-3y=6 \\ x+2y=4 \\ x-5y=a \end{cases}$$

может иметь решение. При каком значении параметра a это будет иметь место?

Ответ: при $a=2$ система имеет единственное решение ($x=\frac{24}{7}$; $y=\frac{2}{7}$). При $a\neq 2$ система не имеет решений.

5. Решить недоопределенную систему

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$

Ответ: система имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}+5C \\ y=\frac{5}{3}-7C \\ z=3C \end{cases}; \quad \text{Или } \vec{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{X}_*+C\vec{e}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}+C\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(C – произвольная константа).

6. Доказать, что если однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение, то решений у нее бесконечно много. Привести примеры этих решений.

7. Решить матричное уравнение:

$$а)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad б)\ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$в)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}; \quad г)\ A\cdot B^T\cdot X=C,$$

$$\text{где } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $а)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $б)\ \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$; $в)\ X=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $г)\ X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. Решить однородные системы:

$$а)\ \begin{cases} 6x_1+9x_2+2x_3=0 \\ -4x_1+x_2+x_3=0 \\ 5x_1+7x_2+4x_3=0 \\ 2x_1+5x_2+3x_3=0 \end{cases};\quad б)\ \begin{cases} 3x_1+5x_2-4x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-6x_3+3x_4=0 \\ 11x_1+17x_2-8x_3+4x_4=0 \end{cases}$$

$$в)\ \begin{cases} 3x_1+5x_2+3x_3+2x_4+x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+6x_3+4x_4+3x_5=0 \\ 7x_1+9x_2+9x_3+6x_4+5x_5=0 \\ 4x_1+8x_2+3x_3+2x_4\qquad =0 \end{cases}.$$

<u>*Ответы*</u>: *а*) Только нулевое решение;

$$б)\ \vec{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};\ в)\ \vec{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

9. Решить неоднородные системы:

$$а)\ \begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=2 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \\ -4x_1-3x_2+x_3=1 \end{cases};\quad б)\ \begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \\ 2x_1-x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2+2x_3=5 \end{cases};$$

$$в)\ \begin{cases} x_1+x_2-6x_3-4x_4=6 \\ 3x_1-x_2-6x_3-4x_4=2 \\ 2x_1+3x_2+9x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+8x_4=-7 \end{cases};\ г)\ \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4=20 \\ 5x_1-x_2+2x_3-x_4=17 \\ -3x_1+2x_2-x_3+2x_4=1 \\ x_1-x_2+4x_3-2x_4=-4 \end{cases};\ д)\ \begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-x_2+5x_3-x_4=4 \\ x_1-x_2+6x_3-x_4=5 \end{cases}.$$

<u>*Ответы*</u>: *а*) Система несовместна; *б*) $(x_1=1;\ x_2=2;\ x_3=3)$;

в) $\left(x_1=0;\ x_2=2;\ x_3=\frac{1}{3};\ x_4=-\frac{3}{2}\right)$; *г*) $(x_1=5;\ x_2=7;\ x_3=0;\ x_4=1)$;

$$д)\ \vec{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

§ 4. Метод определителей решения

систем линейных уравнений

4.1. Метод определителей для систем 2-го 3-го порядков

Этот метод может быть применен лишь к квадратным системам линейных уравнений типа (3.5), да и то не к любым из них. Рассмотрим его сначала на примере простейшей из квадратных систем – на примере системы второго порядка:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \tag{4.1}$$

а) Умножая обе части первого уравнения этой системы на b_2, а второго на $(-b_1)$ и складывая эти уравнения, получим уравнение–следствие системы (4.1), не содержащее y:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\cdot x=c_1b_2-c_2b_1 \tag{4.2}$$

б) Умножая обе части первого уравнения системы (4.1) на $(-a_2)$, а второго на a_1 и складывая эти уравнения, получим уравнение–следствие системы (4.1), не содержащее x:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\cdot y=a_1c_2-a_2c_1 \tag{4.3}$$

А теперь введем обозначения:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1;\ \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1 \tag{4.4}$$

Число Δ называется *главным определителем системы* (4.1). В исходном виде главный определитель этой системы представляется таблицей с двумя строками и двумя столбцами, ограниченными вертикальными линиями. Эта таблица составляется из коэффициентов при неизвестных системы, которые называются *элементами* определителя. Определитель раскрывается по принципу, указанному в (4.4): он равен произведению элементов, стоящих на его главной диагонали минус произведение элементов, стоящих на другой диагонали.

В (4.4) представлены еще два определителя: Δ_x и Δ_y. Это – так называемые *определители неизвестных x и y соответственно*. Принцип их формирования очевиден: определитель Δ_x получается из главного определителя Δ заменой его *первого* столбца (столбца коэффициентов при неизвестной x в системе (4.1)) на столбец свободных членов этой системы. А определитель Δ_y получается из главного определителя Δ заменой его *второго* столбца (столбца коэффициентов при неизвестной y в системе (4.1)) на столбец свободных членов этой системы. Раскрываются (вычисляются) определители неизвестных Δ_x и Δ_y по тому же принципу, что и главный определитель системы Δ.

С учетом обозначений (4.4) уравнения–следствия (4.2) и (4.3) системы (4.1) примут вид:

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases} \tag{4.5}$$

Сразу обратим внимание на то, что система (4.5), являясь следствием исходной системы (4.1), вообще говоря, не равносильна исходной системе. А именно: каждое решение системы (4.1) будет и решением системы (4.5) (ибо последняя выведена из первой), но не каждое решение системы (4.5) будет решением исходной системы (4.1).

В частности, это совершенно очевидно, если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. В этом случае система (4.5) удовлетворяется при любых (x; y). То есть ее решениями являются все точки (x; y) плоскости *xoy*. А исходная система (4.1), при решении которой определяются точки пересечения некоторых двух прямых на плоскости *xoy*, ни в каком случае не может иметь в качестве своих решений любые точки этой плоскости.

Однако если $\Delta \neq 0$, то при любых возможных значениях Δ_x и Δ_y системы (4.5) и (4.1) равносильны. Действительно, в случае $\Delta \neq 0$ система (4.5) имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{cases} \tag{4.6}$$

Формулы (4.6), выражающие это решение, называются *формулами Крамера*. Подставляя эти значения x и y в уравнения исходной системы (4.1) (проделайте это самостоятельно), убеждаемся, что оба ее уравнения удовлетворяются. То есть значения (x; y), определяемые по формулам Крамера (4.6), являются решением исходной системы (4.1). И это решение будет для нее единственным, так как оно является единственным и для системы (4.5), являющейся следствием исходной системы.

Если же $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, то системы (4.1) и (4.5) тоже равносильны: обе они не имеют решений. Действительно, в этом случае заведомо не имеет решений система (4.5), а значит, не может их иметь и исходная система (4.1).

Наконец, рассмотрим подробно случай, когда $\Delta = 0$; $\Delta_x = 0$; $\Delta_y = 0$, то есть тот случай, когда системы (4.1) и (4.5) заведомо не равносильны. Итак, пусть одновременно

$$\begin{cases} \Delta \ = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \\ \Delta_x = c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0 \\ \Delta_y = a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Отметим, что из четырех элементов (a_1; a_2; b_1; b_2) главного определителя системы Δ хотя бы один заведомо не нуль, иначе в исходной системе (4.1) просто не останется неизвестных и система потеряет смысл. Пусть, например, этот ненулевой элемент есть a_1. Тогда из первого равенства системы (4.7) получаем:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \Leftrightarrow b_2 = \frac{a_2}{a_1} b_1 \Leftrightarrow b_2 = \lambda b_1 \quad \left(\lambda = \frac{a_2}{a_1};\ a_2 = \lambda a_1 \right)$$

Подставляя выражения $a_2 = \lambda a_1$ и $b_2 = \lambda b_1$ в два других уравнения системы (4.7), получим:

$$\begin{cases} c_1 \lambda b_1 - c_2 b_1 = 0 \\ a_1 c_2 - \lambda a_1 c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(\lambda c_1 - c_2) = 0 \\ a_1(c_2 - \lambda c_1) = 0 \end{cases}$$

Так как во втором из этих равенств $a_1 \neq 0$, то $c_2 = \lambda c_1$. При этом автоматически выполняется и первое равенство. Итак, имеем:

$$a_2 = \lambda a_1;\ b_2 = \lambda b_1;\ c_2 = \lambda c_1 \tag{4.8}$$

а) Если $\lambda = 0$, то $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, и в системе (4.1) пропадет второе уравнение. Оставшееся первое уравнение $a_1 x + b_1 y = c_1$ имеет, очевидно, бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} y - \text{любое число (ссвободна неизвестная)} \\ x = \dfrac{c_1 - b_1 y}{a_1} \end{cases} \tag{4.9}$$

б) Если $\lambda \neq 0$, то подставляя выражения (4.8) во второе уравнение исходной системы (4.1) и сокращая обе его части на λ, получим в этой системе два одинаковых уравнения:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases} \tag{4.10}$$

Эта система равносильна одному уравнению $a_1x + b_1y = c_1$, которое опять имеет бесчисленное множество решений, выражаемое формулами (4.9).

Подведем итог решения системы (4.1) методом определителей.

1) Если ее главный определитель $\Delta \neq 0$, то она имеет единственное решение, выражаемое формулами Крамера (4.6).

2) Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей неизвестных, Δ_x или Δ_y, отличен от нуля, то система не имеет решений.

3) Если $\Delta = 0$, а также $\Delta_x = \Delta_y = 0$, то система (4.1) вырождается в одно уравнение с двумя неизвестными, одна из которых является свободной. И, таким образом, эта система имеет бесчисленное количество решений.

__Пример 1__. Методом определителей решить систему $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$.

__Решение__. Сначала найдем Δ - главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 7$. Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера (4.6). Найдем определители неизвестных Δ_x и Δ_y:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

Следовательно, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1.$

Метод определителей может быть применен и к квадратной системе линейных уравнений любого порядка *n*. Пусть, например,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{4.11}$$

– квадратная система линейных уравнений 3-го порядка. По той же схеме, по которой из системы (4.1) второго порядка выделялись уравнения (4.2) и (4.3), содержащие лишь по одной неизвестной, мы можем и из системы (4.11) третьего порядка выделить такие уравнения. Если это сделать (выкладки опускаем, попробуйте провести их самостоятельно), то из системы (4.11) получим систему

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \\ \Delta \cdot z = \Delta_z \end{cases}, \qquad (4.12)$$

являющуюся аналогом системы (4.5), выводимой из системы (4.1) второго порядка.

Отметим, что в левых частях всех трех уравнений системы (4.12) стоит одна и та же величина Δ. Она представляет собой следующую комбинацию из коэффициентов при неизвестных системы (4.11):

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 . \qquad (4.13)$$

Эта величина Δ называется *главным определителем системы* (4.11). Только в виде (1.13) главный определитель системы не запоминают и не записывают. Он имеет свое сокращенное обозначение и свою схему вычисления, приводящую к выражению (4.13):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (4.14)$$

И в отличие от определителей (4.4) он не второго, а *третьего* порядка.

Формулу (4.14) легко запомнить: нужно взять элементы $\{a_1; b_1; c_1\}$ первой строки определителя Δ, последовательно умножить их на так называемые *миноры этих элементов*, то есть на определители меньшего (второго) порядка, получающиеся из определителя Δ вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент, и затем сложить все эти произведения, взяв лишь второе из них с обратным знаком. Такое вычисление определителя третьего порядка Δ называется *разложением его по первой строке*.

В правых частях уравнений (4.12) фигурируют еще три определителя третьего порядка – *определители неизвестных* Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \; \Delta_x = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \qquad (4.15)$$

Схема их формирования очевидна: чтобы записать определитель какой-либо неизвестной, нужно взять за основу главный определитель Δ системы (4.11) и заменить в нем столбец коэффициентов при этой неизвестной столбцом свободных членов этой системы. Вычисляются определители Δ_x, Δ_y и Δ_z по той же схеме (4.14), что и главный определитель Δ.

Связь систем (4.11) и (4.12) аналогична связи систем (4.1) и (4.5). А именно:

1) Если $\Delta \neq 0$, то система (4.11), как и система (4.12), имеет единственное решение, определяемое *формулами Крамера*:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \; z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{4.16}$$

2) Если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей неизвестных Δ_x, Δ_y или Δ_z отличен от нуля, то система (4.12) не имеет решений, а вместе с ней не имеет решений и система (4.11).

3) Если $\Delta = 0$ и также $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то, как показывает анализ этого варианта (мы этот анализ опустим), система (4.11) или не имеет решений, или имеет их бесчисленное множество. Какой из этих двух вариантов будет иметь место - можно выяснить, решив систему. Например, методом Гаусса.

<u>*Пример 2*</u>. Методом определителей решить систему:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + 5y - 4z = -5 \\ 4x + y - 3z = -4 \end{cases}$$

<u>*Решение*</u>. Сначала найдем Δ - главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-11) + 3 \cdot 13 + 1 \cdot (-19) = -2.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера (4.15). Найдем определители неизвестных:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -12; \quad \Delta_{\text{я}} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-12}{-2} = 6; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-20}{-2} = 10.$$

Кстати, данная система ранее (§3, пример 4) была решена методом Гаусса, поэтому мы можем сравнить трудоемкость обоих методов. Методом Гаусса, очевидно, система была решена быстрее и проще, чем она была решена методом определителей (подсчет четырех определителей оказывается более трудоемким).

Более того, в случае, если бы главный определитель системы оказался равным нулю, то вычисление оставшихся определителей (определителей неизвестных) могло бы оказаться и напрасным. Ведь только в том случае, когда один из них оказался бы не равным нулю, мы получили бы результат: система не имеет решений. А если бы все четыре определителя оказались равными нулю, то вопрос о решениях системы так и остался бы открытым: то ли система не имеет решений, то ли имеет их бесчисленное множество. Выяснять этот вопрос пришлось бы с помощью метода Гаусса. А когда система не квадратная (недоопределенная или переопределенная), то метод определителей в принципе не может быть применим. Зато методом Гаусса спокойно решаются и такие системы.

И еще. Метод определителей, уступая в универсальности методу Гаусса, является и гораздо более трудоемким, особенно когда дело идет о решении систем большого размера. Он скорее имеет теоретический интерес. А на практике при решении систем линейных уравнений используется главным образом метод Гаусса. Или его модификация - метод Гаусса-Жордана.

Впрочем, метод определителей, когда он может быть применен, гораздо более технологичен, чем метод Гаусса, и он легко может быть запрограммирован для его реализации на ЭВМ.

Все, что сказано выше о применении метода определителей к решению квадратных линейных систем второго и третьего порядков, по аналогии может быть распространено и на квадратные системы 4-го, 5-го и т.д. порядков. При этом появляются и определители соответствующих порядков - 4-го, 5-го и т.д. Для их появления из квадратной системы (3.8) произвольного порядка n выделяются уравнения-следствия, содержащие по одной неизвестной. Эти уравнения образуют систему вида

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta x_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta x_n \end{cases}, \tag{4.17}$$

аналогичную системам (4.5) и (4.12). Здесь

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ .....\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ .....\ a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ .....\ a_{nn} \end{vmatrix};\quad \Delta x_1=\begin{vmatrix} b_1\ a_{12}\ .....\ a_{1n} \\ b_2\ a_{22}\ .....\ a_{2n} \\ .... \\ b_n\ a_{n2}\ .....\ a_{nn} \end{vmatrix};\quad \Delta x_2=\begin{vmatrix} a_{11}\ b_1\ .....\ a_{1n} \\ a_{21}\ b_2\ .....\ a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}\ b_n\ .....\ a_{nn} \end{vmatrix};\ldots\quad \Delta x_n=\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ .....\ b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ .....\ b_2 \\ .... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ .....\ b_n \end{vmatrix} \qquad (4.18)$$

- главный определитель системы (3.8) и определители ее неизвестных. Все они *определители* n*-го порядка* (в каждом из них n строк и n столбцов). Главный определитель составляется из коэффициентов при неизвестных системы. Схема его вычисления при произвольном n приводится ниже, в следующем пункте. А определители Δx_i каждой из неизвестных x_i образуются из главного определителя заменой в нем столбца коэффициентов при этой неизвестной столбцом свободных членов. И вычисляются они по той же схеме, что и главный определитель Δ. То есть здесь в принципе все так же, как и для квадратных систем второго и третьего порядков, рассмотренных выше.

И дальнейшие выводы те же:

а) Если главный определитель $\Delta\neq 0$, то система (4.17), а вместе с ней и система (3.8) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta};\quad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta};\quad ......\quad x_n=\frac{\Delta x_n}{\Delta} \qquad (4.19)$$

б) Если главный определитель $\Delta=0$, а хотя бы один из определителей неизвестных не равен нулю, то система (4.17), очевидно, не имеет решений. А вместе с ней не имеет решений и система (3.8).

в) Если главный определитель $\Delta=0$, и все определители неизвестных тоже равны нулю, то система или не имеет решений, или имеет их бесчисленное множество. Чтобы выяснить, есть ли эти решения, и если есть, то каковы они, нужно систему решить – например, методом Гаусса.

4.2. Определители произвольного порядка. Теорема Лапласа

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.20)$$

- некоторая числовая квадратная матрица n-го порядка. Свяжем с матрицей A (поставим ей в соответствие) некоторое число, которое будем обозначать символом $|A|$ или Δ и называть *определителем этой матрицы*:

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.21)$$

Не следует путать матрицу A и ее определитель $|A|$: матрица – это таблица чисел, а ее определитель – просто одно число. И обозначения у них хоть и похожие, но разные: матрицы обозначаются с помощью двух круглых скобок, а их определители – с помощью двух вертикальных отрезков.

У матрицы n-го порядка и определитель считается n-го порядка. Этот порядок, при необходимости, указывают в обозначении определителя:

$$|A| = |A|_n = \Delta_n \qquad (4.22)$$

Определители, о которых мы сейчас говорим – это не какие-то новые определители. Это те самые определители, с которыми мы только что имели дело в предыдущем пункте этого параграфа. Просто сейчас мы займемся их рассмотрением с общих позиций и поподробнее.

Введем два важных для теории определителей определения.

<u>Определение 1</u>. *Минором* элемента a_{ij} определителя Δ называется определитель Δ_{ij} n-1 – порядка, получающийся из определителя Δ вычеркиванием из него i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

<u>Определение 2</u>. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \Delta_{ij} \qquad (4.23)$$

То есть $A_{ij} = \Delta_{ij}$, если $i + j$ - число четное, и $A_{ij} = -\Delta_{ij}$, если $i + j$ - число нечетное. Отметим, что $i + j$ - это сумма номеров строки и столбца того элемента a_{ij} определителя Δ, для которого число A_{ij} является алгебраическим дополнением.

Пример 1. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов определителя второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta_{11} = a_{22}; \ \ \Delta_{12} = a_{21}; \ \ \Delta_{21} = a_{12}; \ \ \Delta_{22} = a_{11};$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11} = a_{22}; \ \ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \Delta_{12} = -a_{21};$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \Delta_{21} = -a_{12}; \ \ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \Delta_{22} = a_{11}$$

Пример 2. Найти миноры и алгебраические дополнения элементов верхней строки определителя 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3; \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \Delta_{11} = (-1)^2 \cdot 3 = 3;$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \Delta_{12} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1;$$

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -2; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \Delta_{13} = (-1)^4 \cdot (-2) = -2.$$

А теперь приведем (без вывода) ключевую для определителей любого порядка теорему, которую доказал французский математик Лаплас.

Теорема Лапласа. *Определитель любого порядка равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения*.

Пусть, например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{4.24}$$

- хорошо известный нам (см.(4.4)) определитель 2-го порядка. Алгебраическими дополнениями $\{A_1;\, B_1;\, A_2;\, B_2\}$ его элементов $\{a_1;\, b_1;\, a_2;\, b_2\}$ будут числа $\{A_1 = b_2;\, B_1 = -a_2;\, A_2 = -b_1;\, B_2 = a_1\}$. Найдем, в соответствии с теоремой Лапласа, сумму произведений элементов каждой его строки и каждого ее столбца на их алгебраические дополнения:

$$a_1 \cdot A_1 + b_1 \cdot B_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta; \quad a_2 \cdot A_2 + b_2 \cdot B_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta$$

$$a_1 \cdot A_1 + a_2 \cdot A_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta; \quad b_1 \cdot B_1 + b_2 \cdot B_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta \qquad (4.25)$$

Как видим, для определителей 2-го порядка теорема Лапласа справедлива.

Убедимся теперь в справедливости теоремы Лапласа для определителей (4.14) третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (4.26)$$

Найдем, например, алгебраические дополнения элементов его первой строки:

$$A_1 = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$B_1 = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \qquad (4.27)$$

$$C_1 = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

А теперь составим сумму произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$a_1 \cdot A_1 + b_1 \cdot B_1 + c_1 \cdot C_1 = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (4.28)$$

Но это как раз и есть значение определителя Δ, которое дается формулой (4.26). Кстати, выражение (4.26), и мы это уже отмечали, называется *разложением определителя по его первой строке.*

Предлагаем читателю убедиться самостоятельно в том, что и сумма произведений элементов второй строки определителя на их алгебраические дополнения тоже дает Δ. Это же справедливо и для третьей строки, а также для всех трех столбцов определителя.

Таким образом, теорема Лапласа справедлива и для определителей третьего порядка.

Справедлива она и для определителей любого порядка. А, значит, *определитель любого порядка можно раскладывать по любой его строке или столбцу.*

А теперь применим эту теорему для вычисления определителя 4-го порядка.

<u>*Пример 3*</u>. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

<u>*Решение*</u>. Раскладывая его по первому столбцу (это выгодно – в нем много нулей), получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{опять раскладываем определитель} \\ \text{по первому столбцу} \end{vmatrix}$$

$$= 5\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\cdot(3\cdot 1 - 1\cdot 0) = -15.$$

Выгодно было также вычислять этот определитель, раскладывая его по последней (четвертой) строке. И результат получится тот же самый – убедитесь в этом самостоятельно.

4.3. Свойства определителей произвольного порядка

1. *Если какая-либо строка или столбец определителя состоят из одних нулей, то определитель равен нулю.*

<u>Доказательство</u>. Оно очевидно: раскладывая определитель по этой нулевой строке или столбцу, получим нуль.

2. *Если все элементы какой-либо строки или столбца определителя умножить на некоторое число, то определитель умножится на это число.*

<u>Доказательство</u>. Умножим, например, первую строку определителя (4.21) на некоторое число λ и разложим получившийся определитель Δ_* по этой первой строке:

$$\Delta_* = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \dots \lambda a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots \; a_{2n} \\ - - - - & - - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \dots \; a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda a_{11} \cdot A_{11} + \lambda a_{12} \cdot A_{12} + \dots + \lambda a_{1n} \cdot A_{1n} =$$

$= \lambda(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}) = \lambda \cdot \Delta$ - доказательство закончено.

<u>Следствие</u>. *Общий множитель любой строки или столбца можно выносить за знак определителя*.

Например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 50 & 100 & 150 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}02 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 50 \cdot 0{,}01 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0{,}5 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0{,}5 \cdot (-3) = -1{,}5.$$

3. *При транспонировании определителя (при перемене местами его строк и столбцов) определитель не меняется.*

<u>Доказательство</u>. Оно непосредственно следует из теоремы Лапласа, ибо строки и столбцы в ней равноправны.

4. *При перестановке местами любых двух строк (или любых двух столбцов) определителя он меняет знак*.

<u>Доказательство</u>. Предположим вначале, что переставлены местами две соседние строки определителя: i- ая и $i+1$- ая. Разложим исходный определитель Δ по элементам i- ой строки, а новый определитель Δ_* по элементам $i+1$- ой строки, на месте которой будет стоять i- ая строка исходного определителя. Миноры Δ_{ij} элементов a_{ij} этой строки при перестановке строк, очевидно, не изменятся, ибо при их образовании будет вычеркиваться одна и та же строка при неизменившихся столбцах. Тогда по теореме Лапласа получим:

$$\Delta = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \Delta_{i1} + a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot \Delta_{i2} + \dots + a_{in} \cdot (-1)^{i+n} \cdot \Delta_{in};$$

$$\Delta_* = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1+1} \cdot \Delta_{i1} + a_{i2} \cdot (-1)^{i+1+2} \cdot \Delta_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot (-1)^{i+1+n} \cdot \Delta_{in} =$$
$$= (-1) \cdot \left(a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot \Delta_{i1} + a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot \Delta_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot (-1)^{i+n} \cdot \Delta_{in} \right) = -\Delta .$$

То есть при перестановке местами соседних строк определителя он действительно меняет знак.

Если же переставлять местами не соседние строки, а, скажем, i-ую и $(i+k)$-ую, то такую перестановку можно представить себе как последовательное перемещение i-ой строки на k позиций вниз (при этом каждый раз происходит обмен местами соседних строк, а, значит, каждый раз меняется знак определителя), а $(i+k)$-ой строки - на k позиций вверх, что также сопровождается переменой знака определителя k раз. Всего получается, что определитель $2k$ раз меняет знак. Но здесь следует учесть, что когда при встречном движении строки, встретившись, меняются местами, то этот обмен следует считать одним, а не двумя перемещениями движущихся строк. То есть всего перемен местами строк, при которых происходит смена знака определителя, не $2k$, а $2k$-1. Но $2k$-1 – число нечетное. Значит, определитель поменяет знак нечетное число раз. То есть он изменит знак: $\Delta_* = -\Delta$.

Доказательство для столбцов совершенно аналогично.

5. *Если у определителя имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен нулю.*

Доказательство. Переставим местами эти одинаковые строки (или одинаковые столбцы). С одной стороны, определитель от этого, естественно, не изменится. А с другой стороны, по свойству 4, он поменяет знак. То есть $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$.

6. *Если элементы каких-то двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

Доказательство. Если две какие-то строки определителя пропорциональны, то это значит, что элементы одной из них можно получить из элементов другой строки, умножив их на некоторый числовой множитель λ (λ - коэффициент пропорциональности). Вынеся, по следствию из свойства 2, этот множитель λ за знак определителя, получим в определителе две одинаковые строки. А по свойству 5 такой определитель равен нулю.

Для пропорциональных столбцов рассуждение совершенно аналогично.

7. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения элементов другой его строки (столбца) равна нулю.* То есть

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot A_{ks} = a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{kn} = 0, \text{ если } k \neq i \qquad (4.29)$$

Доказательство. Заменим $k-$ую строку определителя на $i-$ую. В получившемся определителе Δ_* окажется две одинаковые строки, поэтому $\Delta_* = 0$. А, с другой стороны, раскладывая Δ_* по $k-$ой строке, получим:

$$\Delta_* = a_{i1}\cdot A_{k1} + a_{i2}\cdot A_{k2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{kn} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot A_{ks} = 0.$$

Доказательство закончено.

Примечание. Объединяя результат теоремы Лапласа и свойство (4.29), получим:

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot A_{ks} = \begin{cases}\Delta, & \text{если}\, k = i\\ 0, & \text{если}\, k \neq i\end{cases} \qquad (4.30)$$

8. *Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число (любое).*

Доказательство. Пусть к элементам $i-$ой строки определителя прибавлены элементы $k-$ой его строки, умноженные на некоторое число λ. Тогда $i-$ая строка примет вид:

$$\left(a_{i1} + \lambda a_{k1};\ a_{i2} + \lambda a_{k2}; \ldots . a_{in} + a_{kn}\right)$$

Разложим определитель по этой строке:

$$\Delta = (a_{i1} + \lambda a_{k1})\cdot A_{i1} + (a_{i2} + \lambda a_{k2})\cdot A_{i2} + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{kn})\cdot A_{in} =$$
$$= (a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{in}\cdot A_{in}) + \lambda(a_{k1}\cdot A_{i1} + a_{k2}\cdot A_{i2} + \ldots + a_{kn}\cdot A_{in}) = \Delta + \lambda\cdot 0 = \Delta$$
,

ибо первая скобка дает Δ, а вторая, по свойству 7, равна нулю.

Свойство 8 широко используется при упрощении определителей.

9. *Определитель единичной матрицы* E *любого порядка равен 1*. То есть если

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ldots 0\\ 0 & 1 & 0\ldots 0\\ - & - & ---\\ 0 & 0 & 0\ldots 1\end{pmatrix}, \text{ то } \quad |E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\ldots 0\\ 0 & 1 & 0\ldots 0\\ - & - & ---\\ 0 & 0 & 0\ldots 1\end{vmatrix} = 1 \qquad (4.31)$$

В частности,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1. \quad \text{И т.д.} \qquad (4.32)$$

Это вытекает из прямого вычисления таких определителей с помощью теоремы Лапласа.

10. *Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей*. То есть если A и B - квадратные матрицы одного порядка, и $C = A \cdot B$ (о произведении матриц см. §2, пункт 2.2), то

$$|C| = |A \cdot B| = |A| \cdot |B| \tag{4.33}$$

Это утверждение оставим без доказательства. Отметим, что из этого свойства вытекает, что $|A \cdot B| = |B \cdot A|$, даже если матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A$ не совпадают.

Знание и использование перечисленных выше свойств определителей существенно облегчает работу с ними. В частности, существенно облегчает их вычисление.

<u>*Пример 4*</u>. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

<u>*Решение*</u>. Умножим элементы четвертого столбца на (-1) и прибавим его к первому столбцу. По свойству 8 определитель от этого не изменится:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{Разложим } \Delta \text{ по его первому столбцу:} \quad \Delta = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

Вынесем за знак определителя общий множитель 2 из первой и из третьей строки:

$$\Delta = 16 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

Умножим второй столбец на 3 и прибавим его к первому столбцу. И умножим этот же второй столбец на 2 и прибавим его к третьему столбцу:

$$\Delta = 16 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -7 & -3 & -5 \\ 8 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по его первой строке} \end{vmatrix} = 16 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -144$$

<u>Определение</u>. Определитель называется *треугольным*, если у него справа или слева от главной диагонали стоят одни нули. То есть треугольные определители – это определители вида

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots a_{3n} \\ - & - & - & - - - - - \\ 0 & 0 & 0 & \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.34}$$

Вычисляя каждый из них, получим один и тот же результат для обоих:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \tag{4.35}$$

То есть *треугольный определитель равен произведению его диагональных элементов.*

В связи с такой простотой вычисления треугольных определителей очень полезно и другие определители приводить к треугольному виду.

<u>*Пример 5*</u>. Привести определитель Δ из предыдущего примера 4 к треугольному виду и затем вычислить его.

<u>*Решение*</u>.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}; \quad \begin{matrix} \text{Умножим четвертый} \\ \text{столбец на (-1) и прибавим} \\ \text{его к первому столбцу :} \end{matrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix};$$

Поменяем местами первую и третью строки: $-\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$: Умножим вторую строку на (-3) и на (-2) и прибавим её к третьей и четвёртой строкам соответственно:

$$-\Delta=\begin{vmatrix}4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 10 & 4\end{vmatrix};$$

Умножим третью строку на (-10/7) и прибавим её к четвёртой строке:

$$-\Delta=\begin{vmatrix}4 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{18}{7}\end{vmatrix}.$$

Получился треугольный определитель. Согласно (4.34), $-\Delta=4\cdot 2\cdot 7\cdot\frac{18}{7}=144$. Значит, $\Delta=-144$.

Вычисление определителей большого размера (порядка) вручную – очень трудоемкое занятие. Но вручную их и не вычисляют: в любом стандартном пакете математических программ для ЭВМ есть программа машинного вычисления определителей. В частности, есть такая программа и в наборе встроенных функций популярной виндоузской программы Excel.

Упражнения

1. Методом определителей решить систему: $\begin{cases}x-y=2\\ x-5y=6\end{cases}$. Для сравнения решить эту же систему методом Гаусса.

Ответ: $x=1$; $y=-1$.

2. Методом определителей решить системы:

$$а)\ \begin{cases}x_1-x_2+x_3=6\\ 2x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+2x_3=5\end{cases};\quad б)\ \begin{cases}2x_1-x_2+x_3=2\\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2\\ x_1-2x_2+x_3=1\end{cases};\quad в)\ \begin{cases}2x+y=5\\ x+3z=16\\ 5y-z=10\end{cases};$$

$$г)\ \begin{cases}3x+4y=11\\ 5y+6z=28\\ x+2z=7\end{cases};\quad д)\ \begin{cases}3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3\\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3\\ x_1+2x_2\qquad\quad -4x_4=-3\\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22\end{cases}.$$

Для сравнения решить их и методом Гаусса.

Ответ: $а)\ \begin{cases}x_1=1\\ x_2=-2\\ x_3=3\end{cases};\ б)\ \begin{cases}x_1=2\\ x_2=-1\\ x_3=-3\end{cases};\ в)\ \begin{cases}x=1\\ y=3\\ z=5\end{cases};\ г)\ \begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}\ д)\ \begin{cases}x_1=-1\\ x_2=3\\ x_3=-2\\ x_4=2\end{cases}.$

3. Вычислить $\Delta = \begin{vmatrix} Sin\alpha & Cos\alpha \\ Sin\beta & Cos\beta \end{vmatrix}$, если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: 1.

4. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: $x_1 = 0; \quad x_2 = 1$.

5. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: $x_1 = 2; \quad x_2 = 3$.

6. Чему равен определитель квадратной матрицы n-го порядка, у которой на главной диагонали стоит число n, а остальные ее элементы – нули?

Ответ: n^n.

§ 5. Матричный метод решения систем линейных уравнений

5.1. Идея метода

Матричный метод, как и метод определителей, не является универсальным методом решения систем линейных уравнений, ибо он может быть применен только к квадратным системам, имеющим единственное решение. То есть к системам, главный определитель которых отличен от нуля. Но зато, если этот метод может быть применен, он дает очень компактное решение, удобное для его численной реализации на ЭВМ.

Итак, рассмотрим произвольную квадратную систему линейных уравнений n-го порядка:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{5.1}$$

Она может быть записана в виде одного матричного уравнения вида

$$AX = B \tag{5.2}$$

Здесь A - матрица коэффициентов при неизвестных; B - матрица-столбец свободных членов системы; X - матрица столбец неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ ------- \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -- \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -- \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Решить матричное уравнение (5.2) – это значит при заданных матрице A и матрице-столбце B найти матрицу-столбец X неизвестных системы.

Пусть существует матрица A^{-1}, обратная матрице A (см. §2, пункт 2.3), и она построена. Тогда умножая обе части матричного уравнения (5.2) на A^{-1}, получим:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \iff EX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B \tag{5.4}$$

Последнее равенство $X = A^{-1}B$ и представляет собой матричное решение уравнения (5.2), а, значит, и решение системы (5.1).

Таким образом, весь вопрос матричного решения квадратных систем линейных уравнений сводится к построению матрицы A^{-1}, обратной матрице A коэффициентов при неизвестных системы.

5.1. Построение обратной матрицы

Как известно (см. §2, пункт 2.3), матрицей A^{-1}, обратной квадратной матрице A, называется квадратная матрица того же порядка, что и порядок матрицы A, и такая, что

$$A^{-1} \cdot A = E \quad \text{или} \quad A \cdot A^{-1} = E \quad (E \text{ - единичная матрица}) \tag{5.5}$$

<u>Теорема</u>. Для существования матрицы A^{-1}, обратной квадратной матрице A, необходимо и достаточно, чтобы определитель $|A|$ матрицы A был отличен от нуля: $|A| \neq 0$.

<u>Необходимость</u>. Пусть матрица имеет обратную матрицу A^{-1}. Тогда $A^{-1} \cdot A = E$, откуда, согласно (4.31) и (4.33), следует:

$$|A^{-1} \cdot A| = |E|; \quad |A^{-1}| \cdot |A| = 1; \quad \Rightarrow \quad |A^{-1}| \neq 0 \text{ и } |A| \neq 0.$$

Достаточность. Пусть $|A| \neq 0$. Рассмотрим квадратную матрицу $\widetilde{A}$, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов матрицы A^T, транспонированной к матрице A. То есть если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ -------- \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix},\ \text{то}\ A^T = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21}\ \dots a_{n1} \\ a_{12}\ a_{22}\ \dots a_{n2} \\ -------- \\ a_{1n}\ a_{2n}\ \dots a_{nn} \end{pmatrix};\ \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11}\ A_{21}\ \dots A_{n1} \\ A_{12}\ A_{22}\ \dots A_{n2} \\ -------- \\ A_{1n}\ A_{2n}\ \dots A_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Матрица $\widetilde{A}$ называется *союзной к матрице* A. Разделим все элементы союзной матрицы $\widetilde{A}$ на $|A|$. В итоге получим новую матрицу A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ -- & -- & -- & -- \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Покажем, что A^* - это и есть A^{-1}. Для этого найдем произведение $C = A \cdot A^*$ матриц A и A^*:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ -------- \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ -- & -- & -- & -- \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} c_{11}\ c_{12}\ \dots c_{1n} \\ c_{21}\ c_{22}\ \dots c_{2n} \\ -------- \\ c_{n1}\ c_{n2}\ \dots c_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Применяя формулу (2.11) из §2, по которой подсчитываются элементы произведения матриц, с учетом (4.30) получим:

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot\frac{A_{j1}}{|A|}+a_{i2}\cdot\frac{A_{j2}}{|A|}+\ldots+a_{in}\cdot\frac{A_{jn}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{js}=\begin{cases}\frac{1}{|A|}\cdot|A|=1, & \text{если } i=j\\ \frac{1}{|A|}\cdot 0=0, & \text{если } i\neq j\end{cases}\qquad(5.9)$$

А это значит, что матрица C - единичная матрица. То есть $A\cdot A^{*}=E$. Точно так же убеждаемся в том, что и $A^{*}\cdot A=E$. Значит, действительно $A^{*}=A^{-1}$.

Из доказанной теоремы вытекает следующая <u>*схема построения*</u> *матрицы A^{-1}, обратной данной матрице A*:

1. Находим определитель $|A|$ матрицы A и убеждаемся, что он не нуль (иначе обратная матрица A^{-1} не существует).

2. Транспонируем матрицу A и получаем матрицу A^{T}.

3. Каждый элемент транспонированной матрицы A^{T} заменяем его алгебраическим дополнением. В результате получаем союзную матрицу $\tilde{A}$.

4. Делим каждый элемент союзной матрицы $\tilde{A}$ на $|A|$. В итоге и получаем обратную матрицу A^{-1}.

<u>*Пример 1*</u>. Найдем матрицу A^{-1}, обратную квадратной матрице $A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$.

<u>*Решение*</u>.

1. Находим $|A|=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$ и убеждаемся, что $|A|\neq 0$. Если это не так, то матрица A^{-1} не существует.

2. Протранспонируем матрицу A и получим матрицу A^{T}: $A^{T}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}$.

3. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A^{T}:

$$A_1=(-1)^{1+1}\cdot b_2=b_2;\quad A_2=(-1)^{1+2}\cdot b_1=-b_1;$$

$$B_1=(-1)^{2+1}\cdot a_2=-a_2;\quad B_2=(-1)^{2+2}\cdot a_1=a_1;$$

В итоге получаем союзную к A матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}b_2 & -b_1\\ -a_2 & a_1\end{pmatrix}$.

4. Разделим каждый элемент матрицы $\tilde{A}$ на $|A| = a_1b_2 - a_2b_1$. В итоге и получим искомую матрицу A^{-1}, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_2}{\Delta} & \dfrac{-b_1}{\Delta} \\ \dfrac{-a_2}{\Delta} & \dfrac{a_1}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}. \qquad (5.10)$$

<u>Проверка</u>. Убедимся в том, что $A^{-1} \cdot A = E$ и что $A \cdot A^{-1} = E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица (убедитесь в этом самостоятельно).

Применим найденную матрицу A^{-1} к решению системы уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$. В матричной форме она имеет вид $AX = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot C = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_2c_1 - b_1c_2 \\ a_1c_2 - a_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta_x}{\Delta} \\ \dfrac{\Delta_y}{\Delta} \end{pmatrix},$$

Ибо

$$b_2c_1 - b_1c_2 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_x; \quad a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_y \text{ (см. формулы (4.4)).}$$

Таким образом, матричный метод решения системы $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ привел к формулам Крамера (4.6), по которым решается эта система в методе определителей. Для систем другого порядка будет то же самое – матричное решение $X = A^{-1}B$ системы $AX = B$ равносильно получению этого решения методом определителей (по формулам Крамера). А, значит, и трудоемкость этих двух методов примерно одинакова.

Тем не менее матричный метод имеет свои преимущества перед методом определителей. Во-первых, в матричной форме $X = A^{-1}B$ решение системы выглядит гораздо компактнее, чем формулы Крамера, по которым решается система, если применять метод определителей. А во-вторых, один раз найдя обратную матрицу A^{-1}, мы можем постоянно использовать ее для решения системы уравнений $AX = B$ при различных правых частях B этой системы. А так как алгоритм нахождения матрицы A^{-1} несложен и четко прописан, то его несложно запрограммировать для реализации на ЭВМ, И это, естественно, давно сделано. Программа нахождения обратной матрицы содержится не только во всех специализированных пакетах математических программ типа Mathcad, Matlab, Mathematica и т.д., но и в хорошо всем известной виндоузской программе Microsoft Excel.

Упражнения

1. Матричным методом решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$.

<u>*Ответ*</u>: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \end{pmatrix}$.

2. Решить матричное уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>*Ответ*</u>: $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Матричным методом решить уравнения:

$$а)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad б)\ X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$в)\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

<u>*Ответ*</u>: *а*) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; *б*) $X = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$; *в*) $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Матричным методом решить системы уравнений:

$$а)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}; \quad б)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}; \quad в)\ \begin{cases} -3x + 2y + 4z = 5 \\ 2x - 4y - 3z = -6 \\ x + 6y + z = 17 \end{cases};$$

г) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+3z=16 \\ 5y-z=10 \end{cases}$; *д*) $\begin{cases} 3x+4y=11 \\ 5y+6z=28 \\ x+2z=7 \end{cases}$; *е*) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ x_1+2x_2 \qquad -4x_4=-3 \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \end{cases}$.

Для сравнения решить их и методом Гаусса.

Ответ:

а) $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-2 \\ x_3=3 \end{cases}$; *б*) $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \\ x_3=-3 \end{cases}$; *в*) $\begin{cases} x=9 \\ y=0 \\ z=8 \end{cases}$; *г*) $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=5 \end{cases}$; *д*) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$; *е*) $\begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \\ x_3=-2 \\ x_4=2 \end{cases}$.

§ 6. Примеры применения матриц и систем линейных уравнений в экономике

6.1. Межотраслевая модель Леонтьева

Предположим, что рассматривается n отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции, произведенной отраслью, идет на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, за год). Введем следующие обозначения:

x_i – общий (валовой) объем продукции i-ой отрасли (i = 1, 2,… n);

x_{ij} – объем продукции i-ой отрасли, потребляемой j-ой отраслью в процессе производства (i, j = 1, 2,… n);

y_i –объем продукции i-ой отрасли для непроизводственного (личного и общественного) потребления (i = 1, 2,… n).

Указанные величины можно свести в таблицу:

Производственное потребление	Конечный продукт	Валовой выпуск
x_{11} x_{12} …… x_{1n} x_{21} x_{22} …… x_{2n} -------------------- x_{n1} x_{n2} …… x_{nn}	y_1 y_2 ----- y_{n}	x_1 x_2 ----- x_{n}

Так как валовой объем продукции любой i-ой отрасли равен суммарному объему продукции, потребляемой всеми n отраслями, и конечного продукта, то должно выполняться соотношение

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

или, в сокращенной форме

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{6.1}$$

Уравнения (6.1) (их n штук) называются *соотношениями межотраслевого баланса*. Единицы измерения содержащихся в уравнениях (6.1) величин могут быть натуральными и для каждого уравнения свои (кубометры, тонны, штуки и т.п.). Но они могут быть и универсальными (стоимостными). В зависимости от этого различают *натуральный* и *стоимостной* межотраслевые балансы. Для определенности рассмотрим далее стоимостной баланс (все величины, входящие в уравнения (6.1), выражены в рублях).

Введем *коэффициенты прямых затрат*

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \qquad (i; j = 1, 2, \ldots n), \tag{6.2}$$

показывающие затраты i-ой отрасли на производство единицы продукции j-ой отрасли. То есть a_{ij} – стоимость продукции отрасли i, вложенной в 1 рубль продукции отрасли j. Так как эти коэффициенты зависят в основном от существующей технологии производства в производящих отраслях, а эта технология меняется достаточно медленно и за рассматриваемый относительно короткий период времени может считаться неизменной, то их можно считать постоянными. Это означает линейную зависимость объема x_{ij} продукции i-ой отрасли, потребляемой j-ой отраслью, от валового объема x_j j-ой отрасли:

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \qquad (i; j = 1, 2, \ldots n). \tag{6.3}$$

Построенная на этом основании модель межотраслевого баланса получила название *линейной, или модели Леонтьева* (американский экономист русского происхождения, лауреат Нобелевской премии по экономике).

С учетом линейных соотношений (6.3) уравнения межотраслевого баланса (6.1) примут вид:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{6.4}$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ -------- \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -- \\ x_n \end{pmatrix};\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ -- \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

где A – так называемая *матрица прямых затрат*, X – матрица-столбец *валового выпуска*, Y – матрица-столбец *конечного продукта*. Тогда систему (6.4) n линейных уравнений с n неизвестными (x_1; x_2; $\ldots x_n$) можно записать в матричном виде:

$$X = AX + Y \tag{6.6}$$

Система (6.6) представляет собой математическую формулировку модели Леонтьева межотраслевого баланса в матричной форме. А задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такой матрицы-столбца валового выпуска X, который при известной матрице прямых затрат A обеспечивает заданный вектор-столбец конечного продукта Y.

В соответствии с экономическим смыслом задачи искомые элементы x_i столбца X должны быть неотрицательны при любых неотрицательных значениях y_i и a_{ij} (i = 1, 2,… n). В таком случае модель Леонтьева называется *продуктивной.*

Существует несколько различных по форме *критериев продуктивности модели Леонтьева.* Один из них формулируется так (доказательство опускаем): если максимум сумм элементов столбцов матрицы A прямых затрат не превосходит единицы, то есть если

$$\max_{j=1,2,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1 \tag{6.7}$$

и существует номер j такой, что эта сумма строго меньше единицы

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \tag{6.8}$$

то модель Леонтьева (6.6) (или, что одно и то же, (6.4)) является продуктивной.

Отметим, что условия (6.7) и (6.8) естественны, так как они имеют наглядный экономический смысл. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{ij}}{x_j} = \frac{x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj}}{x_j} \quad - \tag{6.9}$$

– это доля, которую составляет суммарная стоимость продукции всех отраслей, вложенная в продукцию j-ой отрасли, по отношению к общей стоимости продукции j-ой отрасли. И эта доля для любой отрасли, естественно, не должна превосходить единицу. А точнее, для рентабельной отрасли должна быть меньше единицы, ибо общая стоимость x_j продукции j-ой отрасли включает в себя и другие затраты – стоимость рабочей силы, амортизацию основных фондов и т.д., а также прибыль, получаемую отраслью от продажи продукции.

Пример 1. В таблице ниже содержатся данные баланса промышленности и сельского хозяйства в некотором регионе за некоторый период (в миллиардах рублей):

Отрасль производства	Производственное потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
	промышленность	сельское хозяйство		
Промышленность	0,7	2,1	7,2	10
Сельское хозяйство	1,2	1,5	12,3	15

Требуется вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт промышленности увеличится вдвое, а сельского хозяйства останется на прежнем уровне.

Решение. Согласно таблице имеем:

$$x_{11} = 0{,}7; \quad x_{12} = 2{,}1; \quad x_{21} = 1{,}2; \quad x_{22} = 1{,}5;$$
$$x_1 = 10; \quad x_2 = 15; \quad y_1 = 7{,}2; \quad y_2 = 12{,}3.$$

По формуле (6.2) находим коэффициенты прямых затрат:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = 0{,}07; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = 0{,}14; \quad a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = 0{,}12; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = 0{,}10.$$

Таким образом, матрица $A = \begin{pmatrix} 0{,}07 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}10 \end{pmatrix}$ прямых затрат имеет неотрицательные элементы и, очевидно, удовлетворяет критерию продуктивности, выражаемому неравенствами (6.7) и (6.8), ибо

$$0{,}07 + 0{,}12 = 0{,}19 < 1; \quad 0{,}14 + 0{,}10 = 0{,}24 < 1.$$

По условию задачи, в измененных условиях производства конечный продукт промышленности y_1 должен составить $7{,}2 \cdot 2 = 14{,}4$ млрд. рублей, а конечный продукт y_2 сельского хозяйства должен остаться неизменным и составить 12,3 млрд. рублей. Поэтому для определения соответствующих валовых объемов x_1 и x_2 этих отраслей получаем, согласно (6.4), следующую систему линейных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}07x_1 + 0{,}14x_2 + 14{,}4 \\ x_2 = 0{,}12x_1 + 0{,}10x_2 + 12{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}93x_1 - 0{,}14x_2 = 14{,}4 \\ -0{,}12x_1 + 0{,}90x_2 = 12{,}3 \end{cases}$$

Ее главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}93 & -0{,}14 \\ -0{,}12 & 0{,}90 \end{vmatrix} = 0{,}93 \cdot 0{,}90 - (-0{,}12) \cdot (-0{,}14) = 0{,}8202 \neq 0$$

Значит, система имеет единственное решение. Вычисляя еще два определителя неизвестных

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 14{,}4 & -0{,}14 \\ 12{,}3 & 0{,}90 \end{vmatrix} = 14{,}4 \cdot 0{,}90 - 12{,}3 \cdot (-0{,}14) = 146{,}82$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 0{,}93 & 14{,}4 \\ -0{,}12 & 12{,}3 \end{vmatrix} = 0{,}93 \cdot 12{,}3 - (-0{,}12) \cdot 14{,}4 = 131{,}67$$

и используя формулы Крамера (4.6), получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \approx 17{,}90; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \approx 16{,}05.$$

6.2. Линейная модель международной бездефицитной торговли

Будем считать, что бюджеты (x_1; x_2; $\ldots x_n$) n стран расходуются этими странами целиком на покупку товаров внутри страны и вне ее (так называемый торговый бюджет). И пусть x_{ij} – сумма, на которую j-ая страна закупает товаров у i-ой страны. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} = x_j \quad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{6.10}$$

– бюджет j-ой страны, а

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = P_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{6.11}$$

– общая выручка i-ой страны от внутренней и внешней торговли. При торговом бездефицитном бюджете общая выручка страны и составляет ее бюджет. Поэтому

$$P_i = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{6.12}$$

Далее, пусть

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i,j = 1, 2, \ldots n) \tag{6.13}$$

– доля бюджета x_j, которую тратит j-ая страна на закупку товаров у i-ой страны. Тогда

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j \quad (i,j = 1, 2, \ldots n), \tag{6.14}$$

причем, в силу (6.10) и (6.13),

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{6.15}$$

Подставляя выражения (6.14) для x_{ij} в выражения (6.11) для P_i и учитывая равенства (6.12), приходим к системе n линейных уравнений с n неизвестными (x_1; x_2; $\ldots x_n$):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{6.16}$$

Или, в развернутой форме, к системе:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2 \\ -------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases} \tag{6.17}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ ------- \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

коэффициентов при неизвестных системы (6.17) называется *матрицей структурной торговли*. Ее особенностью, согласно (6.15), является то, что сумма элементов каждого ее столбца равна единице, и все ее элементы неотрицательны. Если она задана, то решив систему (6.17), найдем бюджеты (x_1; x_2; $\ldots x_n$) всех стран, принимающих участие в бездефицитной торговле.

Отметим, что система (6.17) является однородной. Действительно, перенеся правые части в (6.17) налево, получим следующую однородную систему

$$\begin{cases} (a_{11}-1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-1)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ ---------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-1)x_n = 0 \end{cases} \tag{6.19}$$

Сложив все уравнения этой системы, в силу равенств (6.15) получим тождество $0 = 0$. Это значит, что каждое из уравнений системы (6.19) линейно зависит от остальных ее уравнений. То есть каждое уравнение системы (6.19) является следствием остальных. Иначе говоря, оно автоматически будет выполняться, если будут выполняться остальные n–1 уравнений. Но это значит, что в системе (6.19) одно уравнение (любое) можно отбросить. Тогда вместо квадратной системы (6.19) получим недоопределенную однородную систему. А недоопределенная однородная система, как мы знаем из § 3, имеет бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выделить искомое решение (x_1; x_2; $\ldots x_n$), необходимо задать некоторое дополнительное условие для ее неизвестных, то есть для бюджетов x_i (i = 1, 2,… n) всех стран. Например, задать суммарный бюджет C всех стран:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = C \tag{6.20}$$

<u>*Пример 2*</u>. Структурная матрица торговли четырех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Найти бюджеты (x_1; x_2; x_3; x_4) этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма бюджетов задана:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270 \text{ (усл. ед.)}.$$

<u>*Решение*</u>. Составим систему (6.19):

$$\begin{cases} -0{,}8x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}2x_4 = 0 \\ 0{,}4x_1 - 0{,}7x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}2x_4 = 0 \\ 0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 - 0{,}5x_3 + 0{,}2x_4 = 0 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 - 0{,}6x_4 = 0 \end{cases}$$

Отбросив в этой системе последнее уравнение и решив оставшуюся систему методом Гаусса (выкладки опускаем), получим:

$$x_1 = 140C; \quad x_2 = 146C; \quad x_3 = 220C; \quad x_4 = 121C,$$

где C – произвольная константа. Подставив эти выражения в заданную сумму бюджетов, определим эту константу:

$$140C + 146C + 220C + 121C = 6720 \Leftrightarrow 627C = 6270 \Leftrightarrow C = 10.$$

Значит,

$$(x_1 = 1400; \quad x_2 = 1460; \quad x_3 = 2200; \quad x_4 = 1210) \text{ (усл. ед.)}.$$

Упражнения

1. В таблице приведены данные об исполнении межотраслевого баланса за некоторый отчетный период в условных денежных единицах:

Отрасль производства	Производственное потребление		Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2		
1	100	160	240	500
2	275	40	85	400

Определить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечный продукт первой отрасли должен увеличиться на 100 %, а второй отрасли – на 20 %.

Ответ: $x_1 = 945{,}6$; $x_2 = 691{,}2$.

2. Структурная матрица торговли трех стран имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Найти бюджеты $(x_1; x_2; x_3)$ этих стран, удовлетворяющие сбалансированной бездефицитной торговле при условии, что сумма их бюджетов равна 90 (усл. ед.).

Ответ: $x_1 = 30$; $x_2 = 40$; $x_3 = 20$.

Литература

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика для экономистов. Изд-во «Питер», 2009.

2. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. Изд-во «ЮНИТИ», 1998.

3. Малыхин В.И. Высшая математика. Изд-во «Инфра-М», 2006.

Учебное издание

Комогорцев Владимир Филиппович

Линейная алгебра

с основами аналитической геометрии на плоскости

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 12.03.2013г. Формат 60x84. 1/16.
Бумага печатная. Усл.п.л. 7,55. Тираж 150 экз. Изд.№2308.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365, Брянская обл., Выгоничский район, п. Кокино, БГСХА